4.3 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met decimale en/of negatieve exponenten zit.
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel dat de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B(t) = 3 \cdot 2^t$, met $t = 0$ is 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je teruggaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule met alleen de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur? Gaat dit ook zonder formule?

Uitleg

Stel dat voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt:
$B = 6 \cdot 2^t$ met $t = 0$ om 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit voor 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur $\frac{6}{2} = 3$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

De hoeveelheid bacteriën op $t = -1$ moet dus 3 zijn. Ga met behulp van de rekenmachine na dat dit overeenkomt met $6 \cdot 2^{-1}$.

Zo krijgen negatieve exponenten betekenis.

Figuur 2

De hoeveelheid bacteriën om 14:15 uur kun je berekenen door met decimale exponenten te werken. Om 14:15 uur geldt $t = 2{,}25$. Het aantal bacteriën is op dat moment:

$B = 6 \cdot 2^{2{,}25} \approx 28{,}54$

Zo krijgen ook decimale exponenten betekenis.

De groeifactor per uur van de hoeveelheid bacteriën is 2.
De groeifactor per dag is $2^{24} = 16777216$.

De groeifactor per kwartier ($0{,}25 = \frac{1}{4}$) is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}19$.

Zo hebben ook gebroken exponenten betekenis.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 6 \cdot 2^t$ voor t invullen om de hoeveelheid bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 6 \cdot 2^t$ voor t invullen om de hoeveelheid bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoe groot is de groeifactor per vier uur?

c Hoe groot is de groeifactor per vijf uur?

d Hoe groot is de groeifactor per half uur?

e Hoe groot is de groeifactor per kwartier?

Theorie en voorbeelden

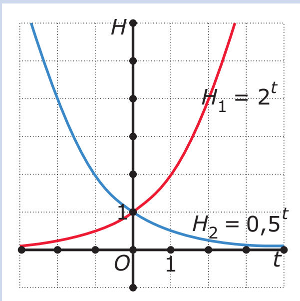
Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is $g > 0$.

De algemene formule voor **exponentiële groei** is: $H = b \cdot g^t$
Hierin is H de hoeveelheid en t de tijd.

In feite mag t alle reële waarden aannemen, ook breuken en/of negatieve getallen. En daarom zijn bij exponentiële groei de grafieken vloeiende kromme lijnen.

Ook kun je nu de groeifactor g per tijdseenheid omrekenen naar de groeifactor per (bijvoorbeeld) een halve tijdseenheid of een kwart tijdseenheid.



Figuur 3

- De groeifactor per $\frac{1}{2}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{2}}$
- De groeifactor per $\frac{1}{4}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{4}}$

Voorbeeld 1

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,05. Noem de groeifactor per half jaar g: de groeifactor per half jaar $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

Het rentepercentage per half jaar is dus 2,47.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$. Het rentepercentage per maand is dus 0,41.

Opgave 4

Bij een bank krijg je 2,1% rente per jaar. Wat is het rentepercentage per maand, afgerond op twee decimalen?

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank tegen een rente van 4,2% per jaar. Wat is zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Voorbeeld 2

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de 19e eeuw.

tijd (jaar)	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 1

Stel een model op voor de bevolkingsgroei per jaar, vanaf 1800, in de vorm van een passende formule. Maak er een grafiek bij en bereken hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest kunnen zijn.

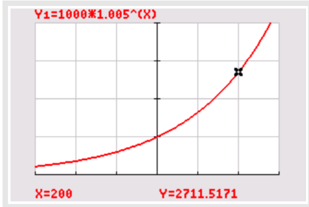
Antwoord

Om een formule op te stellen, moet je de groeifactor berekenen. Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van twintig jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per twintig jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan: $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$

Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoenen mensen N, dan is: $N = 1000 \cdot 1{,}005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} = 369$ miljoen mensen zijn geweest. In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} = 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen.



Figuur 4

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je de groei van de wereldbevolking in de 19e eeuw.

a Maak zelf de grafiek zoals je die in het voorbeeld ziet.

b Bereken de aantallen mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?

c Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond de groeifactor per vijf jaar ook af op drie decimalen.

Voorbeeld 3

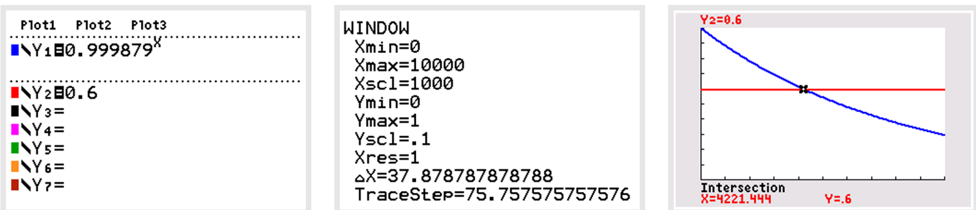
De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenoemde koolstof-14-methode. Koolstof-14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. De concentratie van deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie koolstof-14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie koolstof-14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je de leeftijd van die mummie?

Let op dat je de groeifactor per jaar in voldoende decimalen opschrijft. En let ook op dat je op de grafische rekenmachine rekent met het onafgeronde antwoord.

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt dus: $g^{5736} = 0{,}5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = 0{,}5^{\frac{1}{5736}} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine. Je vindt $t = 4221$ jaar. De mummie is ongeveer 4221 jaar oud.



Figuur 5

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de koolstof-14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp van de groeifactor per eeuw de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de koolstof-14-concentratie 38% is.

Verwerken

Opgave 8

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid groeit met 36% per jaar. Bereken het groeipercentage per maand.

b Een hoeveelheid neemt met 14% per week af. Bereken het percentage dat de hoeveelheid per dag afneemt.

Opgave 9

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid is in twee jaar verviervoudigd. Bereken het groeipercentage per maand.

b Van een hoeveelheid is na drie weken nog maar een derde deel over.
Bereken het percentage waarmee de hoeveelheid per dag afneemt.

Opgave 10

Om 9:00 uur waren er 500 bacteriën. Dit aantal groeit exponentieel. Je ziet een tabel met het aantal bacteriën op bepaalde tijdstippen.

tijd	9:00	12:00	15:00	18:00
bacteriën	500	1500	4500	13500

Tabel 2

a Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per uur.

b Stel de formule op van de hoeveelheid bacteriën N na t uur met $t = 0$ om 9:00 uur.

c Hoeveel bacteriën waren er om 6:00 uur?

d Hoe laat waren er 250 bacteriën? Gebruik de formule die je bij b hebt gevonden.

Opgave 11

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 12

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal heeft jaren vastgestaan tegen een rente van 6%. De rente werd elk jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een bedrag in duizenden ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

Opgave 13

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.
Rond de groeifactor af op drie decimalen.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 14: Wereldbevolking

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in 1500 jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a In de tekst is sprake van verschillende perioden. Bereken voor die perioden waarin de wereldbevolking zich heeft verdubbeld het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken ook voor de andere perioden het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15: Radioactiviteit

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen. Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Testen

Opgave 16

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 17

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf seizoenen later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.