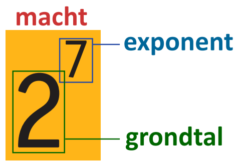
4.2 Rekenen met machten

Inleiding

In de formules voor exponentiële groei komen machten voor. Om er mee te kunnen werken moet je dus met machten kunnen rekenen. Waarschijnlijk heb je dat wel geleerd, maar hier worden de belangrijkste rekenregels voor machten nog even opnieuw uitgelegd.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met machten;
- de rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel dat de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 5 \cdot 2^t$, met de tijd t in uren.

a Op $t = 4$ heb je $5 \cdot 2^4 = 80$ bacteriën. Hoeveel heb je er nog weer vier uur later?

b De groeifactor per uur is 2. Hoeveel is de groeifactor per dag?

c Welke tijd hoort bij de groeifactor $\left(2^{24}\right)^7$?

Uitleg

Voor de hoeveelheid bacteriën B (milligram) na t uur geldt de formule $B = 6 \cdot 2^t$. Door te denken aan bacteriegroei en deze functie B kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ milligram bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$

Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ milligram. Dit is het aantal gram bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten van 2 vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.

Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot 2^{7-4}$ milligram (namelijk het moment dat $t = 3$). Dit is het aantal milligram bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten van 2 deelt, trek je de exponenten af.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$

$(2^3)^4 = 2^{12}$

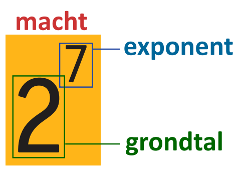
$2^0 = 1$

Figuur 2

De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. Het aantal milligram bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Je hebt nu gerekend met machten van 2. Dit getal is de groeifactor van de hoeveelheid bacteriën. Dit is het grondtal van de macht.

Deze rekenregels gelden heel algemeen voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.



Figuur 3

Opgave 1

Welke berekeningen zijn juist?

a $2^3 \cdot 2^5 = 2^{15}$

b $11^{50} \cdot 11^{50} = 11^{100}$

c $3^7 + 2^7 = 5^7$

d $(2^2)^3 = 2^6$

Opgave 2

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $(6^3)^6$

Theorie en voorbeelden

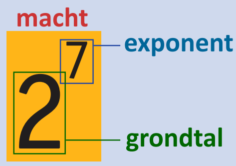
Om te onthouden

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**, waarbij t (voorlopig) een positief geheel getal is.

Voor $t = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$

In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m de volgende **rekenregels**:

- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 4

Voorbeeld 1

Als één macht schrijven:

- $(2^3)^4 \cdot 2^{10} = 2^{12} \cdot 2^{10} = 2^{22}$
- $\frac{3^{16}}{3 \cdot 3^4} = \frac{3^{16}}{3^5} = 3^{11}$
- $2^{10} + 7 \cdot 2^{10} = 1 \cdot 2^{10} + 7 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$
- $0{,}9^4 \cdot (0{,}9^2)^3 = 0{,}9^4 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}9^{10}$

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** gebruik je de rekenregels voor machten. Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht.

a $2^3 \cdot (2^4)^2$

b $4^5 \cdot 2^3$

c $\frac{(5^2)^4}{5 \cdot 5^3}$

d $\frac{5^6}{5^2 \cdot 5^4}$

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 0,5% rente per maand. De bank wil de rente per half jaar bijschrijven of zelfs jaarlijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per maand is 1,005.

De groeifactor per half jaar is dan: $1{,}005^6 = 1{,}0304$. Het rentepercentage per half jaar is dus 3,04. Dat is iets meer dan $6 \cdot 0{,}5 = 3\%$.

Op dezelfde manier is de groeifactor per jaar $\left(1{,}005^6\right)^2$ of $1{,}005^{12}$ en dat is ongeveer 1,0617. Het rentepercentage per jaar is dus 6,17.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je omrekent van een groeifactor per maand naar een groeifactor per half jaar en een groeifactor per jaar. Bekijk ook de bijbehorende groeipercentages. De groeifactor per uur is 1,02.

a Hoeveel bedraagt het groeipercentage per uur?

b Hoeveel is de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

c De groeifactor per uur wordt 0,91. Hoe groot is het groeipercentage per uur?

d Hoeveel is de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

Opgave 5

Iemand zet op 1 januari 2000 op een bankrekening € 800,00 tegen 1,6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2005? Laat zien hoe je dat berekent.

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2000 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2020 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2000 vermenigvuldigen met de groeifactor per twintig jaar;
- het tegoed op 1 januari 2000 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2000 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Voorbeeld 3

Bereken.

$\frac{4^{100} \cdot 8^{200}}{16^{199}}$

Antwoord

Reken zonder grafische rekenmachine.

Reken met de rekenregels en met machten van 2.

Ga maar na: $4 = 2^4$, $8 = 2^3$ en $16 = 2^4$

$$\frac{(2^2)^{100} \cdot (2^3)^{200}}{(2^4)^{199}} = \frac{2^{200} \cdot 2^{600}}{2^{796}} = \frac{2^{800}}{2^{796}} = 2^4 = 16$$

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht te schrijven.

a $\frac{4^{107} \cdot 2^{80}}{8^{96}}$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{83} \cdot (3^{40})^2$

c $\frac{4^6 \cdot 64^4}{16^2}$

Verwerken

Opgave 7

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2005 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 1 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2010 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar twee keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Hoeveel is de groeifactor per jaar?

b Maak een tabel voor de met riet bedekte oppervlakte voor de eerste vijf jaar.

c Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

d Na hoeveel jaar is het hele meer begroeid met riet?

Opgave 8

Schrijf als één macht.

a $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^1$

b $\frac{5^{312}}{5^{309}}$

c $3^{69} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{60}$

Opgave 9

De concentratie van een bepaalde vervuilende stof in het water neemt langzaam af met een vast percentage van 13 per uur. Op $t = 0$ is de concentratie 150 mg per liter.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Stel een formule op voor de concentratie C als functie van de tijd t in uren.

b Na hoeveel uur is de concentratie gehalveerd?

c Met hoeveel procent neemt de concentratie per dag af?

Opgave 10

Bereken.

a $3^{110} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{109}$

b $\left(\frac{3}{4}\right)^{235} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{236}$

Opgave 11

Bereken.

$\frac{4^{180} \cdot 2^{60}}{8^{112} \cdot 4^{42}}$

Toepassen

Opgave 12: Getallenpuzzel

Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2017}?

Testen

Opgave 13

Schrijf als één macht: $\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{21}}$.

Opgave 14

Iemand betaalt een huur van € 950,00 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.

b Maak een tabel waarmee je kunt uitzoeken hoe lang het duurt tot de huur meer dan € 1300,00 per maand is geworden.

c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per 4 jaar?

d Bereken met behulp van de groeifactor per 4 jaar de groeifactor per 20 jaar.

e Bereken het groeipercentage per 20 jaar.

f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 15

Een bepaalde soort vlinders wordt in een natuurgebied zijn voortbestaan bedreigd. In 2007 werden er nog 4600 exemplaren van geteld. In de volgende jaren blijkt dat de aantallen elk jaar met 12% afnemen.

a Stel een formule op voor het aantal vlinders van die soort $N(t)$, waarin t de tijd in jaren na 2007 is.

b Na hoeveel jaar is de het aantal vlinders minder dan 1000 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je het aantal vlinders na vijf jaar vermenigvuldigen om het aantal na tien jaar te krijgen? Bereken het aantal vlinders na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het rekenen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.