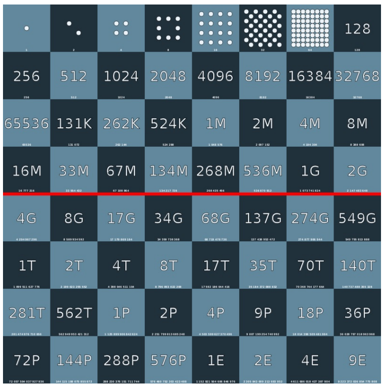
4.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4tje nooit lukken?

c Stel dat het onbegrensde vel papier 0,15 mm dik is.

Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Het aantal bacteriën is dan verdubbeld. Bij een geschikte constante temperatuur (er gaan dan geen bacteriën dood) kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- Op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën.
- Na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën.
- Na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$bacteriën.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van ‘exponentiële groei’.

Opgave 1

Lees de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van het aantal bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

d Hoeveel bacteriën heb je na 13 uur?

e Hoeveel bacteriën heb je na 15 uur?

Opgave 2

De formule voor de bacteriegroei in de **Uitleg** is: $B = 6 \cdot 2^t$.

a Breng deze formule in beeld op de grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat er minstens 24 uur bacteriegroei in beeld komt.

b Hoeveel bacteriën zijn er na 20 uur?

c Op welk tijdstip is er meer dan 60000 bacteriën? Rond af op twee decimalen.

d Op welk tijdstip is de hoeveelheid bacteriën dan weer verdubbeld (dus 120000 geworden)? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

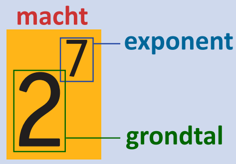
Bij exponentiële groei vermenigvuldig je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal. Dit getal g heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Voor g geldt: $g > 0$

Om uit een tabel vast te stellen of een hoeveelheid H exponentieel groeit, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde uit, dan is er sprake van **exponentiële groei**. De hoeveelheid H groeit dan zo:

- Op $t = 0$ heb je de beginwaarde b.
- Op $t = 1$ heb je: $H = b \cdot g$
- Op $t = 2$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g = b \cdot g^2$
- Op $t = 3$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g \cdot g = b \cdot g^3$

Dus er geldt een formule van de vorm: $H = b \cdot g^t$

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**.

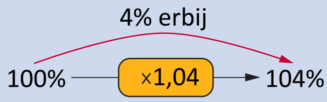


Figuur 2

Een voorbeeld van exponentiële groei is toename of afname met een vast percentage. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: **exponentiële toename**.

Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $g < 1$ (maar groter dan 0): **exponentiële afname**.



Figuur 3

Voorbeeld 1

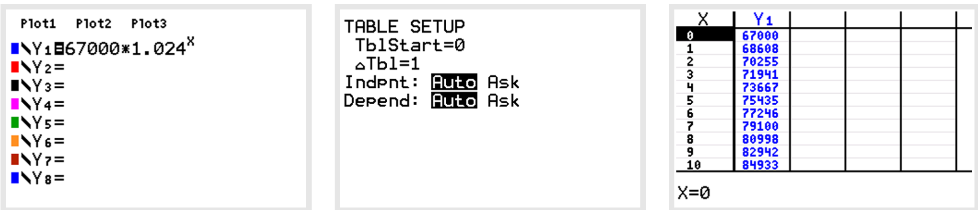
Het aantal inwoners van Dorenstad groeit volgens de formule: $N = 67000 \cdot 1{,}024^t$

Hierin is t de tijd in jaren en N het aantal inwoners van Dorenstad (afgerond op duizendtallen). $t = 0$ in het jaar 2016. Met hoeveel procent per jaar groeit het aantal inwoners van Dorenstad volgens deze formule? In welk jaar heeft Dorenstad meer dan 100000 inwoners als deze groei zo doorgaat?

Antwoord

Er is sprake van exponentiële groei met een groeifactor van 1,024. Elk jaar wordt het inwoneraantal met 1,024 vermenigvuldigd, dus 100% is een jaar later 102,4%. Er komt jaarlijks 2,4% bij.

Als je deze formule invoert op de grafische rekenmachine heb je snel een tabel. Je kunt dan aflezen voor welke waarde van t je voor het eerst boven de 100000 zit. Je vindt $t = 17$. Het aantal inwoners zal dus in $2016 + 17 = 2033$ boven de 100000 komen.



Figuur 4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe het aantal inwoners van Dorenstad exponentieel groeit. Het aantal inwoners van Amstvorde groeit volgens de formule $N = 110000 \cdot 1{,}013^t$ met t in jaren vanaf 2016.

a Waaraan zie je dat Amstvorde een grotere stad is dan Dorenstad?

b Waaraan zie je dat de procentuele groei in Amstvorde kleiner is dan in Dorenstad?

c Hoe groot is de groeifactor van het aantal mensen in Amstvorde per jaar? Hoe groot is het jaarlijkse groeipercentage?

d Hoe groot is de groeifactor van het aantal inwoners van Amstvorde per tien jaar? En hoe groot is het groeipercentage per tien jaar?

e Maak nu de grafieken van de groeiformules van de steden Dorenstad en Amstvorde in één figuur op de grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat het snijpunt van beide grafieken in beeld komt.

f Bepaal met de grafische rekenmachine het jaar waarin Dorenstad groter wordt dan Amstvorde als hun groei precies zo zal doorgaan. Hoeveel inwoners heeft Dorenstad aan het einde van dat jaar?

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

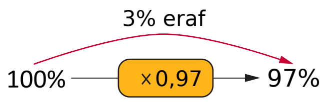
tijd (jaar)	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in de problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

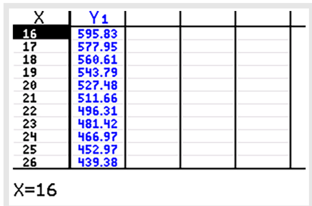
Je controleert eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.



Figuur 5

De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$

Maak een tabel van deze functie met de rekenmachine. Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.



Figuur 6

Opgave 4

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**. Er is sprake van exponentiële afname.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer 0,97 is.

b Welke formule vind je voor het aantal abonnementen A als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 5

Geef de groeifactor van de volgende groei- of afnamepercentages.

a 10% toename

b 100% toename

c 0,2% toename

d 100% afname

e 0,1% afname

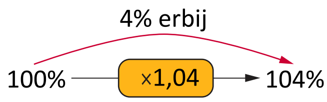
f 40% afname

Voorbeeld 3

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit vanaf 1 januari 2010 niet verandert.

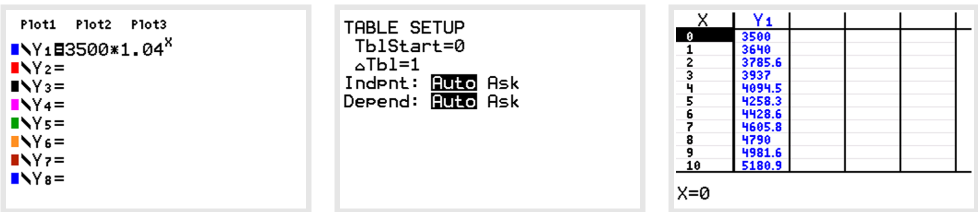
- Stel de formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- Maak een tabel met de grafische rekenmachine en bekijk hoe het saldo zich ontwikkelt.
- Hoe groot zijn de groeifactor en het groeipercentage per drie jaar? En per vijf jaar?

Antwoord



Figuur 7

- Bij een procentuele toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$
- Als je deze formule invoert op de grafische rekenmachine heb je snel een tabel.
- Per drie jaar is de groeifactor: $1{,}04^3 \approx 1{,}1249$ dus het groeipercentage is dan bijna 12,5%. Per vijf jaar is de groeifactor: $1{,}04^5 \approx 1{,}22$, dus het groeipercentage is dan ongeveer 22%.



Figuur 8

Opgave 6

Iemand zet op 1 januari 2020 € 800,00 op een bankrekening tegen 0,6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2025?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed S uitgedrukt in t, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2040 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Opgave 7

Neem de tabel over en vul hem in:

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 3

Opgave 8

Van twee vogelsoorten die alleen op één bepaald eiland voorkomen, neemt het aantal de laatste jaren af.

tijd (jaar)	2004	2005	2006	2007	2008
aantal vogels soort A	5200	4888	4594	4319	4060
aantal vogels soort B	6400	6205	5998	5801	5598

Tabel 4

a Leg uit dat het aantal vogels van soort A exponentieel lijkt af te nemen. Wat is de groeifactor per jaar?

b Hoeveel vogels van soort A zullen er in 2011 geweest zijn als de afname zo doorgaat?

c Het aantal vogels van soort B neemt ongeveer lineair af. Laat dat zien.

d In welk jaar zullen er van beide soorten vogels evenveel zijn als de groei zo doorgaat?

Verwerken

Opgave 9

De oppervlakte die door een snelgroeiende waterplant wordt bedekt, neemt elke dag met 50% toe.

a Met welk getal moet je de oppervlakte vermenigvuldigen als je de oppervlakte wilt weten die de waterplant morgen zal bedekken?

b Neemt de oppervlakte van de waterplant in twee dagen met 100% toe? Of met een ander percentage? Licht je antwoord toe.

c Is hier sprake van exponentiële groei? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Iemand koopt aandelen ter waarde van € 4000,00. De aandelen nemen gedurende de eerste vier jaar elk jaar 11% in waarde toe.

a Bereken de waarde van de aandelen na één jaar en na twee jaar.

b Wat is de groeifactor van de waarde van de aandelen?

c Hoe kun je met behulp van de waarde na twee jaar de waarde na drie jaar berekenen?

d De waarde na vier jaar is € 6072,28. Hoe kun je hieruit met behulp van de groeifactor de waarde na drie jaar berekenen?

e In het zesde jaar stijgt de waarde van de aandelen van € 6740,23 naar € 7279,45. Met hoeveel procent is de waarde van de aandelen in het zesde jaar toegenomen? Wat is nu de groeifactor?

Opgave 11

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten vanaf het jaar 2014.

b Bereken het aantal herten in het jaar 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 12

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 5

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger, in vergelijking met de vorige situatie, meer oplevert als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 13

Twee scholen hebben te maken met teruglopende leerlingenaantallen.

tijd (jaar teldatum 1 sept.)	2009	2010	2011	2012	2013
aantal leerlingen school 1	1050	998	948	900	855
aantal leerlingen school 2	1050	1000	960	890	850

Tabel 6

a Bij een van beide scholen neemt het leerlingenaantal jaarlijks met een vast percentage af. Bij welke school is dat en met welk percentage?

b Hoe groot is het groeipercentage in tien jaar?

c In deze situatie heeft het geen zin om naar kleinere tijdseenheden dan een jaar te kijken. Waarom niet?

Toepassen

Opgave 14: Sparen voor een scooter

Bij de geboorte van Marijn heeft zijn vader bedacht dat hij op 16 jarige leeftijd wel een (elektrische) scooter zou willen rijden. Hij heeft een bedrag op een spaarrekening gezet die elk jaar 4% rente geeft. Na 16 jaar is het bedrag € 2750,00 geworden. Hoeveel heeft de vader van Marijn gestort?

a Wat is de groeifactor in 16 jaar?

b Hoeveel heeft de vader van Marijn gestort?

Opgave 15: Internetsparen

Er zijn nogal wat verschillende internetspaarrekeningen. In deze opgave worden er twee vergeleken: een gewone spaarrekening en één met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld € 2500,00 van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je € 25,00 aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar € 2475,00 uitbetaald.

Je stort € 10000,00 op een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 1,85. Je stort ook € 10000,00 op een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 2,65% rente op jaarbasis geeft. Na zes jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

a Bereken bij elk van beide internetspaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

b Stel voor beide internetspaarrekeningen een bijbehorende formule op voor het totale bedrag B dat je na t jaar kunt opnemen.

c Bereken in maanden nauwkeurig op welke termijn de internetspaarrekening zonder opnamekosten het aantrekkelijkst is.

Testen

Opgave 16

In de tabel hieronder zie je de grootte van een spaartegoed op 1 januari in een aantal opeenvolgende jaren.

jaar	2005	2006	2007	2008	2009	2010
tegoed in €	1000,00	1040,00	1081,60	1124,86	1169,86	1216,65

Tabel 7

a Bereken het verschil tussen de bedragen in 2005 en 2006. Hoe zou de tabel eruit zien als de groei na 2006 zich lineair zou voortzetten?

b Je kunt uit a concluderen dat de groei van het spaartegoed niet lineair is. Ga na dat het tegoed exponentieel groeit.

c Hoeveel bedraagt de groeifactor? En het groeipercentage?

d Hoe groot zal het tegoed zijn op 1 januari 2020?

Opgave 17

Iemand betaalt op 1 januari 2002 een huur van € 300 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 5,5%.

a Is hier sprake van exponentiële groei?

b Bereken de huur op 1 januari 2003 en op 1 januari 2004.

c Met hoeveel procent stijgt de huur per twee jaar?

Opgave 18

Iemand koopt vlak voor de crisis in 2008 voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

a Stel een formule op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000 geworden?