

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd, kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

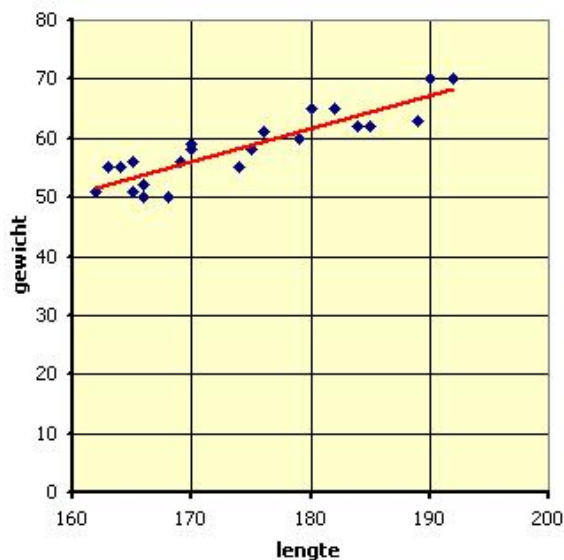
- recht evenredig — evenredigheidsconstante — hellingsgetal
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt
- lineair model
- lineaire vergelijking — lineaire ongelijkheid
- lineaire vergelijking en lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Activiteitenlijst

- een recht evenredig verband tussen twee variabelen herkennen
- een lineaire functie herkennen — hellingsgetal en begingetal gebruik om de grafiek te tekenen — een lineaire functie opstellen vanuit een begingetal en een hellingsgetal
- een lineaire functie opstellen vanuit twee gegeven punten
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen
- gebieden bij lineaire ongelijkheden tekenen — eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen oplossen

Achtergronden

In praktijksituaties wordt een verband tussen twee variabelen vaak onderzocht door te meten. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte en gewicht bij mensen. Langere mensen zullen gemiddeld wel zwaarder zijn dan kleinere, dus het lijkt er op dat er tussen lengte L (cm) en gewicht G (kg) een verband bestaat. Dat kun je voor scholieren in 4-havo bijvoorbeeld onderzoeken door een steekproef te nemen (bijvoorbeeld alle havo 4-leerlingen van een bepaalde school) en daarvan lengte en gewicht te meten. Als je die gegevens in een Excelbestand zet en vervolgens een grafiek (kies grafiektype 'Spreiding') maakt, kun je bekijken of er als grafiek ongeveer een rechte lijn uitkomt. In Excel kun je de rechte lijn die het beste bij je meetpunten past, laten tekenen (Invoegen: Trendlijn). Zelf kun je er dan wel een formule bij maken. Excel past hierbij lineaire regressie toe. Het verband is alleen betrouwbaar als je meetpunten ook echt redelijk dicht bij de getekende trendlijn liggen.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Los de lineaire vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $\frac{1}{6}x + 5 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$
- b $40 + 0,16a \leq 36 + 0,18a$
- c $\frac{3x-5}{4} + 2 > \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{2}$
- d $25(x - 10) = 110 - 20x$

Opgave 2

Een zwembad vraagt € 3,00 toegang per bezoek. Met een abonnement is de toegang € 1,25 per bezoek. Een abonnement kost € 17,50 per jaar. Bereken algebraïsch vanaf welk aantal bezoeken per jaar het voordeliger is om een abonnement te kopen.

Opgave 3

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km per uur, Henk met een snelheid van 12 km per uur. Henk begint 2 minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

- a Hoe groot zijn hun snelheden in meters per minuut?
- b Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?
- c Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter). Welke eenheden zijn er gebruikt? Is voor Ton a recht evenredig met t ?
- d Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk? Is voor Henk a recht evenredig met t ?
- e Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel ligt hij dan op de ander voor?

Opgave 4

De huurprijs van een kopieerapparaat is opgebouwd uit € 225,00 per maand en € 0,06 per gemaakte kopie.

- a Geef een formule voor de huurprijs h in euro's per maand, afhankelijk van het aantal gemaakte kopieën n .
- b Hoeveel kopieën zijn er gemaakt als de huur € 378,96 is?
Een andere firma biedt een gelijkwaardig kopieerapparaat aan tegen de huurprijs van € 0,10 per gemaakte kopie, zonder daarbij een vast bedrag per maand te rekenen.
- c Bij welk aantal gemaakte kopieën is deze tweede aanbieder voordeliger?

Opgave 5

Rachel hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in grammen, u is de uitrekking van de veer in centimeters. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 1

- a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?
- b Geef de formule die u uitdrukt in m .
- c Als er 50 gram aan de veer hangt, is de totale lengte l van de veer 35 cm. Geef de formule die l uitdrukt in m .

Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 cm lang en met 10 gram eraan 15,5 cm lang.

- d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m .
- e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

Opgave 6

Iemand investeert € 10000 die voor hem wordt belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat deze aandelen sterk in waarde zullen dalen. De aandelen in fonds B lijken meer winst te gaan opleveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, fonds B levert dat jaar 14% winst op. In totaal wordt er € 1180 winst aan deze investeerder uitgekeerd. a is het bedrag dat voor hem in fonds A is belegd, b is het bedrag dat in fonds B is belegd.

- a Aan welke twee formules moeten a en b voldoen?
- b Bereken met behulp van een vergelijking hoeveel geld er voor de investeerder in fonds A is belegd.

Opgave 7

Een fabrikant produceert twee soorten papieren zakdoekjes in pakjes van tien stuks. In een wit pakje zitten geurloze zakdoekjes, in een groen pakje zitten zakdoekjes met een mentholgeur. Voor de productie van deze zakdoekjes is nodig:

- voor een pakje geurloze zakdoekjes: 20 gram papier en 1 wit hoesje
- voor een pakje mentholzakdoekjes: 25 gram papier, 1 centiliter mentholoplossing en 1 groen hoesje

Per dag is beschikbaar: 100 kilogram papier, 20 liter mentholoplossing, 3000 witte hoesjes en 2500 groene hoesjes. x is het aantal pakjes geurloze zakdoekjes dat per dag wordt geproduceerd en y is het aantal geproduceerde pakjes mentholzakdoekjes per dag.

- a Aan welke ongelijkheden moeten x en y voldoen?
- b Teken het gebied met alle mogelijke combinaties (x, y) in een assenstelsel.
De winst op een pakje geurloze zakdoekjes is € 0,08 en die op een pakje mentholzakdoekjes is € 0,09.
- c Bereken de maximale winst die haalbaar is.

Opgave 8

In de zeventiger jaren bestonden verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas (voor het gemak zijn de bedragen omgerekend van gulden in euro). In een bepaalde gemeente geldt dan:

- bij een jaarverbruik tot en met 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (klein verbruik)
- bij een jaarverbruik van meer dan 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (groot verbruik)

- a De grafiek voor het jaarverbruik valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a , het aantal verbruikte m^3 . Geef van elk van die lineaire functies een formule.
- b Teken een grafiek van de jaarlijkse kosten K voor het gasverbruik a lopend van 0 tot 900 kubieke meter (m^3).
- c Een tuinder die aan de meterstand ziet dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zal komen, verbrandt gas af. Wat denk je dat gas afbranden is en waarom doet de tuinder dat?
- d Vanaf welk jaarverbruik levert het gas afbranden een besparing op?
- e Welke maatregelen kan het gasbedrijf treffen om gas afbranden te voorkomen?

Toepassen

Opgave 9: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbijschieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor op topsnelheid is. Dit is 16 seconden nadat de auto de motoragent passeert; de motor heeft dan 300 m afgelegd. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor een constante topsnelheid van 200 km/h heeft.

- Hoeveel meter voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor op topsnelheid is?
- Stel een formule op voor de afgelegde weg $a(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.
- Stel een formule op voor de afgelegde weg $m(t)$ van de motor op topsnelheid.
- Hoeveel seconden nadat hij op topsnelheid rijdt heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 10: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c . Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

- Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?
- Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeeltes.

- Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?
- Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afsprekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

- Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

Opgave 11: Economisch evenwicht

Economen werken vaak met stelsels vergelijkingen. Het gaat daarbij om variabelen als prijs, hoeveelheid, inkomsten, winst, en dergelijke. Een voorbeeld daarvan is een model van vraag en aanbod op een graanmarkt. Vraag en aanbod in een periode hangen af van de prijs gedurende die periode, zoals je in de tabel kunt zien. Bij een (te) lage prijs ontstaat er een grote vraag en een laag aanbod. Daardoor gaat de prijs weer omhoog.

	prijs per ton	totale vraag	totale aanbod
	p	q_v	q_a
periode 1	€ 200,00	5000 ton	2000 ton
periode 2	€ 400,00	4000 ton	5000 ton
periode 3	€ 600,00	3000 ton	8000 ton

Tabel 2

Er zijn drie variabelen, namelijk p (de prijs per ton in euro), q_v (de totale vraag in ton) en q_a (het totale aanbod in ton). Economen zijn geïnteresseerd in de waarde voor p waarbij vraag en aanbod in evenwicht zijn. Dus: $q_v = q_a$.

- Teken in één figuur de grafieken van q_a uitgezet tegen p en van q_v uitgezet tegen p .

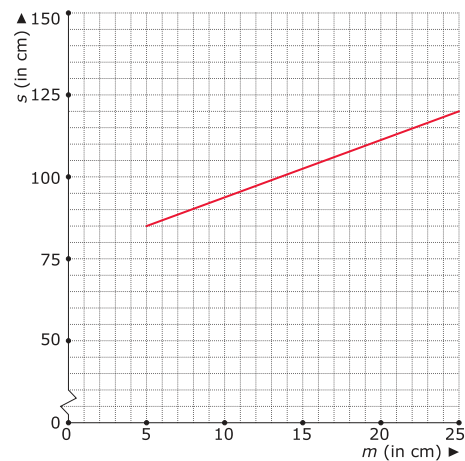
De grafieken suggereren dat je lineaire formules voor q_a en q_v afhankelijk van p kunt opstellen.

- b** Stel deze formules op.
- c** Bereken de evenwichtsprijs, dus de prijs waarvoor $q_v = q_a$.
- d** Wat gebeurt er met de evenwichtsprijs als de vraag afneemt?

Examen

Opgave 12: Schofthoogte

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras. De grafiek geeft het verband tussen de schofthoogte s en de lengte van de metacarpus m voor ras A.



Figuur 2

- a** Stel de formule op die bij deze grafiek past.
Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$, met $5 \leq m \leq 25$
- b** Neem de grafiek over en teken in rood de grafiek bij de formule van ras B in die figuur.
- c** Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.

- d** Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengtes van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in de tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 3

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

- e** Bereken voor een rund van ras A en voor een rund van ras B het levend gewicht bij een metacarpus van 21 cm.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Opgave 13: Veldkrekels

Onderstaande tekst is ontleend aan het *Brabants Dagblad* van 28 mei 1997.

De veldkrekkel is een toonkunstenaar. Moeiteloos sjirpt hij een hoge C. Het tempo van de roepzang is afhankelijk van het weer. Bij fris weer laat de veldkrekkel gemiddeld één sjirp per seconde horen, bij warm weer wel gemiddeld vijf, met alle variaties daartussen. Sterker, de veldkrekkel kan eigenlijk wel als een thermometer gebruikt worden.

De onderzoeker M. Duijm heeft daar eens een berekening voor uitgedokterd. Het rekenvoorschrift luidt: neem het gemiddelde aantal sjirpen per vijf seconden, tel er zeven bij op, en je weet de temperatuur in graden Celsius.

Midas Dekkers evenwel hanteert een rekenvoorschrift waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal sjirpen per minuut. Je trekt er veertig van af, deelt de uitkomst door zeven en telt er tien bij op.

Stel dat een krekkel op een zeker moment gemiddeld 2,4 sjirpen per seconde maakt. Als we met de twee rekenvoorschriften de temperatuur op dat moment berekenen, vinden we twee heel verschillende uitkomsten.

- a Hoeveel graden verschillen die uitkomsten? Licht je antwoord toe.
- b Stel voor M. Duijm en voor Midas Dekkers de formule op die de temperatuur t (in $^{\circ}\text{C}$) uitdrukt in het gemiddeld aantal sjirpen n per seconde.

Voor het verschil dat bij a gevonden is, is een eenvoudige verklaring: niet alle krekels sjirpen hetzelfde. Het rekenvoorschrift van Duijm geldt voor de veldkrekkel, terwijl Dekkers het heeft over de sneeuwboomkrekkel. Bij alle soorten krekels sjirpen de mannetjes om wijfjes te lokken. De wijfjes herkennen hun eigen soort aan de sjirpsnelheid, dus aan het aantal sjirpen per seconde.

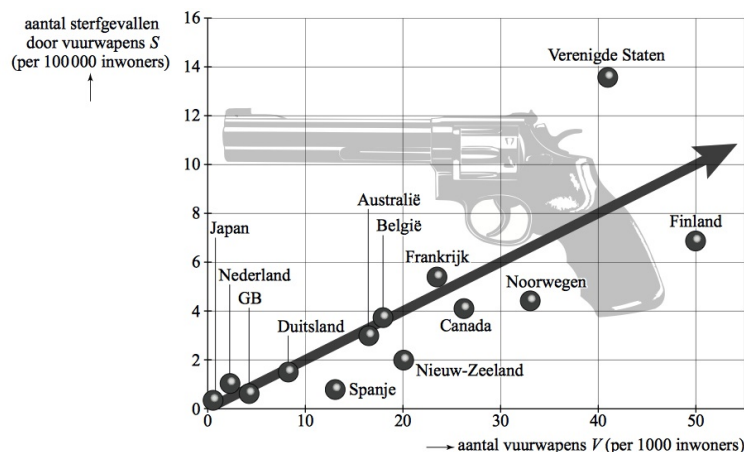
- c Bij welke temperatuur kan het veldkrekkelvrouwtje geen verschil horen tussen een veldkrekkelmannetje en een sneeuwboomkrekkelmannetje? Licht je antwoord toe door algebraïsch een bijpassende vergelijking op te lossen.

(naar: examen wiskunde A havo 1999, tweede tijdvak)

Opgave 14: Vuurwapens

De regels omtrent het vuurwepensbezit zijn per land verschillend. Deze regels staan ook wel eens ter discussie. Tegenstanders van vuurwepensbezit beweren dat het gebruik van wapens toe zal nemen als mensen makkelijker aan vuurwapens kunnen komen.

Voorstanders van vuurwepensbezit zeggen dat het niet de wapens zijn die doden, maar de mensen. Zij vinden dat mensen vrij moeten zijn om een vuurwapen aan te schaffen, omdat meer vuurwapens niet betekent dat er dan ook meer gebruik van wordt gemaakt.



Figuur 3

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in de grafiek.

De grafiek geeft het verband weer tussen het jaarlijkse *aantal sterfgevallen door vuurwapens* S (per 100000 inwoners) en het *aantal vuurwapens* V (per 1000 inwoners). Behalve de gegevens van een aantal landen is in de grafiek ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V .

Zowel voorstanders als tegenstanders van vuurwapenbezit kunnen de grafiek gebruiken als steun voor hun standpunt.

- a** Geef een argument dat voorstanders uit deze grafiek kunnen halen en geef een argument dat tegenstanders uit de grafiek kunnen halen.

Nederland heeft ongeveer 17 miljoen inwoners, de Verenigde Staten ongeveer 295 miljoen.

- b** Bereken met behulp van de grafiek hoeveel keer zo groot het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens in de Verenigde Staten is, vergeleken met Nederland.

In 2005 heeft de bevolking van Brazilië zich in een referendum uitgesproken tegen het beperken van de verkoop van vuurwapens. En dat terwijl er in dit land met 180 miljoen inwoners jaarlijks zo'n 40000 mensen sterven door vuurwapengebruik.

Ga ervan uit dat Brazilië op de trendlijn ligt, zodat je gebruik kunt maken van het evenredige verband tussen S en V .

- c** Bereken met behulp van dit evenredige verband het totaal aantal vuurwapens in Brazilië.

(bron: examen havo wiskunde A in 2009, eerste tijdvak)



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
