3.5 Ongelijkheden en gebieden

Inleiding

Bij een muziekvoorstelling werden twee soorten kaartjes verkocht: een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. Als er nu voor € 1200,00 aan kaartjes is verkocht, dan past daarbij een vergelijking als $2{,}50k + 4{,}50v = 1200$ als k het aantal kinderkaartjes en v het aantal kaartjes voor volwassenen is.

Figuur 1

Dit is ook een lineair verband, maar niet van de vorm $y = a \cdot x + b$. In dit onderdeel leer je werken met lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$.

Je leert in dit onderwerp

- lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$ herleiden tot de vorm $y = ax + b$;
- combineren van lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$: snijpunt uitrekenen;
- combineren van lineaire ongelijkheden: het juiste gebied in een assenstelsel weergeven.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- lineaire vergelijkingen oplossen;
- lineaire ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Een theatervoorstelling trekt tweehonderd bezoekers. Een kinderkaartje kost € 7,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 15,00. In totaal is er voor € 2775,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt twee vergelijkingen met twee onbekenden.

a Welke twee vergelijkingen passen bij dit probleem?

b Zijn het lineaire verbanden tussen deze variabelen?

Uitleg 1

Een muziekvoorstelling trekt driehonderd bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken.

Figuur 2

Noem bijvoorbeeld het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Dan is:

- $k + v = 300$;
- $2{,}5k + 4{,}5v = 1110$.

Wil je weten hoeveel volwassenen er waren, dan herleid je beide formules tot de vorm $k = \dots$

- $k = -v + 300$
- $k = -1{,}8v + 444$

Je ziet dat beide formules horen bij een lineair verband. Je kunt de bijbehorende rechte lijnen tekenen. Ook kun je de waarden van v van het snijpunt berekenen door de vergelijking $-v + 300 = -1{,}8v + 444$ op te lossen.

Vaak zal een dergelijke situatie wat complexer zijn: er zijn bijvoorbeeld maximaal driehonderd plaatsen en er moet (om voldoende toezicht voor de kinderen te hebben) per twee kinderen minstens een volwassene in de zaal aanwezig zijn. Hoe krijg je nu de mogelijkheden in beeld?

Opgave 1

Bekijk het probleem in **Uitleg 1**. Je gaat het probleem verder oplossen.

a Leg uit hoe je beide vergelijkingen herleidt naar de vorm $k = ...$

b Maak vervolgens de grafieken van beide lineaire verbanden op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen.

c Met welke vergelijking kun je nu het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer de berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Van een rechthoek is de omtrek 90 centimeter. De lengte van de rechthoek is 21 centimeter meer dan de breedte. Je wilt de lengte en de breedte uitrekenen.

a Welke twee vergelijkingen in l (voor de lengte) en b (voor de breedte) kun je hierbij opstellen?

b Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $l = ...$ Maak vervolgens de grafieken van beide lineaire verbanden op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen.

c Met welke vergelijking kun je het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer die berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Hoe groot worden de lengte en de breedte?

Uitleg 2

In een circustent kunnen maximaal 500 bezoekers. Een volwassene mag maximaal twee kinderen meenemen. Kinderen mogen alleen naar binnen onder begeleiding van een volwassene.

Je onderzoekt hoeveel kinderen er maximaal in de tent mogen zijn.

Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v.

Je kunt dan het verhaal vertalen in ongelijkheden:

- $k + v \leq 500$
- $v \geq \frac{1}{2}k$, met $k \geq 0$ en $v \geq 0$

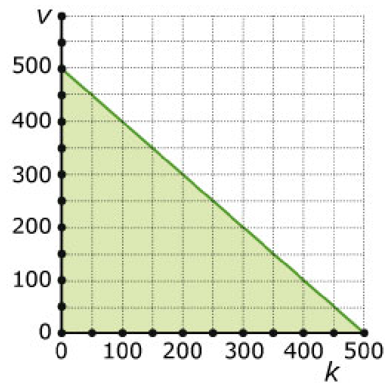
Deze ongelijkheden breng je in beeld door een k,v-assenstelsel te tekenen.
Zet de ongelijkheid $k + v \leq 500$ om in de gelijkheid: $k + v = 500$.
Dit herleid je tot $v = -k + 500$ als v op de verticale as komt. Teken de lijn en houd rekening met $k \geq 0$ en $v \geq 0$.

Kleur nu het gebied dat aan de ongelijkheden voldoet.
Als je twijfelt aan welke kant van de lijn je moet kleuren, neem dan een punt dat niet op de lijn ligt. Ga daarvan na of het voldoet aan $k + v \leq 500$. Als het punt voldoet, kleur dan alle punten aan die kant van de lijn. Zo niet, dan kleur je de punten aan de andere kant van de lijn.

Je krijgt de figuur hiernaast.

Maar je hebt nog geen antwoord op de vraag. Want nu lijkt het of er 500 kinderen in de tent mogen. Maar dan kunnen er geen volwassenen meer bij.

Je hebt de ongelijkheid $v \geq \frac{1}{2}k$ nog niet verwerkt.



Figuur 3

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je lost de laatste ongelijkheid zelf op.

a Licht toe hoe je aan de twee ongelijkheden $k + v \leq 500$ en $v \geq 0{,}5k$ komt.

b Licht toe hoe je uit $k + v = 500$ de formule $v = -k + 500$ krijgt.

c Neem de figuur uit de uitleg over en geef er in geel ook het gebied van de ongelijkheid $v \geq 0{,}5k$ in aan.

d Bereken met de vergelijkingen het maximale aantal kinderen dat in de zaal mag zitten.

Opgave 4

Op een kaasboerderij worden kaas en boter gemaakt van melk onder de voorwaarden:

- Voor 1 kilogram kaas is 9,8 kilogram melk nodig.
- Voor 1 kilogram boter is 22,5 kilogram melk nodig.
- Er is 1000 kilogram melk in voorraad.
- Er wordt twee keer zo veel boter als kaas gemaakt.

a Noem de hoeveelheid boter b en de hoeveelheid kaas k. Stel twee vergelijkingen op.

b Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $k = ...$

c Maak de grafieken van beide lineaire functies op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen. Met welke vergelijking kun je het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer die berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Bereken hoeveel kg boter en kaas er wordt gemaakt als alle melk wordt gebruikt.

Opgave 5

Stel dat je een groep van dertig personen van drinken wilt voorzien. Je wilt literpakken appelsap en sinaasappelsap kopen. Je hebt minstens zes pakken nodig, maar meer dan tien zou overdreven zijn. Je beschikt over € 20,00 om deze frisdrank te kopen. Appelsap kost € 1,80 per literpak, sinaasappelsap kost € 2,10 per literpak. Neem als variabelen het aantal pakken appelsap x en het aantal pakken sinaasappelsap y.

a Aan welke vijf ongelijkheden moeten deze variabelen voldoen?

b Teken een assenstelsel en geef daarin het gebied aan dat voldoet aan de vijf ongelijkheden.

c Beide variabelen kunnen alleen gehele waarden aannemen. Hoeveel oplossingen zijn er mogelijk?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire ongelijkheid

Situaties kunnen soms wiskundig worden beschreven met ongelijkheden zoals: $k + v \leq 500$ of $5k + 3v \geq 10000$.

Om met deze ongelijkheden te kunnen rekenen, maak je er eerst een vergelijking van: $5k + 3v = 10000$

Zo'n vergelijking heeft met de variabelen x en y de algemene vorm: $px + qy = r$, waarin p, q en r getallen zijn. Omdat je $px + qy = r$ kan schrijven als $y = ax + b$, is $px + qy = r$ een **lineair verband** tussen de variabelen x en y.

De bij dit lineaire verband horende **lineaire ongelijkheid** heeft de vorm:

$px + qy \leq r$ of $px + qy \geq r$

De punten (x,y) die aan zo'n ongelijkheid voldoen, vormen een **vlakdeel** met als **grenslijn** de lijn $px + qy = r$. De x-as en de y-as zijn ook vaak grenslijnen van zo'n vlakdeel.

Een **vlakdeel tekenen** van een ongelijkheid:

- Teken de grenslijn.
- Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt en controleer of het aan de ongelijkheid voldoet. Met bijvoorbeeld het punt (0,0) reken je makkelijk.
- Kleur het vlakdeel waarvoor de ongelijkheid geldt.

Soms moet je meerdere grenslijnen tekenen om een vlakdeel in te sluiten.

Opmerking 1:
Ongelijkheden kunnen ook de vorm $px + qy > r$ of $px + qy < r$ hebben. De grenslijn hoort dan niet bij het vlakdeel. Die situatie komt niet of nauwelijks voor.

Opmerking 2:
Er zijn grafische rekenmachines die een grafiek in de vorm $px + qy = r$ of een bijbehorende ongelijkheid kunnen tekenen.

Voorbeeld 1

Welke waarden voor x en y voldoen aan de vergelijkingen $3x + y = 10$ en $x + 2y = 15$?

Antwoord

Herleid beide formules tot de vorm $y = ax + b$.

- $3x + y = 10$ tot $y = -3x + 10$
- $x + 2y = 15$ tot $y = -0{,}5x + 7{,}5$

Je vindt x en y door de coördinaten van het snijpunt te berekenen.

Er zijn twee manieren:

1. Met de grafische rekenmachine: maak grafieken en bepaal het snijpunt.
2. Los de volgende vergelijking op en bereken met de gevonden x-waarde de y-waarde.

$$\begin{aligned} -3x + 10 &= -0{,}5x + 7{,}5 \\ -2{,}5x &= -2{,}5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Door in een van de formules $x = 1$ in te vullen, vind je $y = 7$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Laat zien hoe je beide formules herleidt tot de vorm $y = ax + b$.

b Gebruik de balansmethode. Welke waarden voor x en y voldoen aan $2x + 4y = 7$ en $3x - 4y = 8$?

c Gebruik de grafische rekenmachine. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig. Welke waarden voor p en q voldoen aan $p + 4q = 12$ en $3p - 2q = 6$?

Opgave 7

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: zaal en balkon. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 216 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 2930,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats?

Voorbeeld 2

Geef in een assenstelsel het gebied aan met de punten die voldoen aan de ongelijkheden: $2x + 3y \leq 120$, $x + y \geq 30$, met $0 \leq x \leq 45$ en $y \geq 0$.

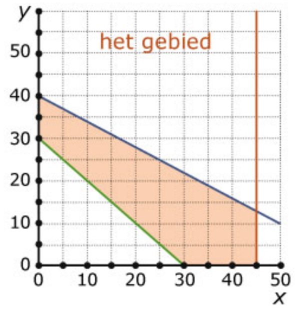
Antwoord

Behalve de x-as en de y-as zijn de grenslijnen:

- $2x + 3y = 120$, dus $y = -\frac{2}{3}x + 40$
- $x + y = 30$, dus $y = -x + 30$
- $x = 45$

Teken eerst een assenstelsel met zowel $x \geq 0$ als $y \geq 0$.

Teken nu per ongelijkheid de grenslijn en ga na of (bijvoorbeeld) het punt (0,0) voldoet. Als dit zo is, dan zit je gebied aan de kant van de grenslijn waar dit punt ligt. Hiermee bepaal je aan beide grenslijnen het juiste gebied.



Figuur 4

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.
Teken in een x,y-assenstelsel het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden:
$x \geq 1$, $x \leq 4$, $x + 3y \leq 7$ en $x - 3y \leq 10$.

Opgave 9

Een rijwielhandelaar krijgt een aanbod van een fietsfabriek: hij kan een bepaald type fiets inkopen voor € 650,00 per stuk. Een fiets met elektrische trapondersteuning kan hij inkopen voor € 1300,00. Hij kan niet meer dan veertig fietsen in voorraad hebben en beschikt over maximaal € 39000,00 om te investeren. Verder koopt hij minstens tien fietsen met (elektrische) trapondersteuning in, omdat hij verwacht die gemakkelijk te kunnen verkopen.

a Noem het aantal gewone fietsen dat de rijwielhandelaar inkoopt g en het aantal fietsen met trapondersteuning t en beschrijf alle ongelijkheden waaraan deze twee variabelen moeten voldoen.

b Geef in een g,t-assenstelsel het gebied aan waarin aan alle bij a gevonden ongelijkheden wordt voldaan.

Op een gewone fiets wordt € 250,00 winst gemaakt en op een fiets met trapondersteuning € 400,00. De winkelier wil zo veel mogelijk winst maken met de verkoop van deze fietsen.

c Hoeveel fietsen van elke soort kan de winkelier het best inkopen?

Verwerken

Opgave 10

Bereken x en y.

a Met de balansmethode als: $x + 3y = 10$ en $x + y = 4$.

b Met de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig als: $2x - y = 10$ en $3x + 5y = 4$.

Opgave 11

In een x,y-assenstelsel wordt een gebied bepaald door de lineaire ongelijkheden:

- $x + 2y \leq 10$
- $y \leq 2x$
- $0 \leq x \leq 8$
- $y \geq 0$

Teken dit gebied en lees de coördinaten van de hoekpunten af.

Opgave 12

Een winkelier wil twee nieuwe merken waspoeder aan zijn klanten aanbieden. Beide merken zitten in dozen van vijf kilogram verpakt. Beide soorten dozen hebben dezelfde afmetingen. De winkelier heeft elke dag ruimte voor hoogstens vijftig van deze dozen waspoeder en hij wil in elk geval vijftien dozen van beide merken hebben staan aan het begin van de dag. Hij vult zijn schap met deze waspoeders uitsluitend aan het begin van elke dag bij. Merk A kost € 4,50 per doos, merk B kost € 5,25 per doos. a is het aantal dozen van merk A en b dat van merk B.

a Welke ongelijkheden gelden voor a en b?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (a,b) weer.

Op een zekere dag heeft de winkelier voor precies € 183,00 aan dozen waspoeder van die twee merken verkocht.

c Welke vergelijking in a en b hoort hierbij?

d Hoeveel dozen waspoeder van merk A heeft de winkelier die dag verkocht?

Opgave 13

Om een heg te kunnen maken, koopt iemand jonge groenblijvende planten: 20 thuja´s en 12 jeneverbessen. Deze planten kosten samen € 267,00. Na het planten blijven 2 jeneverbessen over, maar zijn er 5 thuja's te weinig. Bij het tuincentrum worden de 2 jeneverbessen geruild voor 5 thuja's. De bijkomende kosten zijn € 18,00.

a Noem de prijs van een thuja t en die van een jeneverbes j. Welke twee lineaire verbanden zijn er tussen t en j?

b Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Opgave 14

Een koffiebranderij gebruikt twee soorten koffie: Arabica en Robusta. Na het branden en fijnmalen worden de twee soorten koffie gemengd tot de melanges ‘goudmerk’ en ‘zilvermerk’. Goudmerk is een mengsel van 400 gram Arabica koffie en 100 gram Robusta koffie. Zilvermerk is een mengsel van 200 gram Arabica koffie en 300 gram Robusta koffie. De koffiebranderij kan dagelijks maximaal 6000 kg Arabica koffie en 6000 kg Robusta koffie verwerken tot maximaal 20000 pakken zilvermerk en 12000 pakken goudmerk, elk van 500 gram. Noem het aantal pakken goudmerk g en het aantal pakken zilvermerk z.

a Welke ongelijkheden gelden voor g en z?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (g,z) weer.

De winst voor de koffiebranderij op een pak goudmerk is € 0,80 en die op een pak zilvermerk is € 0,50.

c Bij hoeveel verkochte pakken goudmerk en pakken zilvermerk per dag maakt deze fabrikant de meeste winst?

Toepassen

Opgave 15: Tablets

Een bedrijf assembleert twee typen tablets: type A en type B. Er is voor elk type tablet een assemblagelijn opgezet waarin per uur hoogstens 50 tablets kunnen worden samengesteld. Met het maken van tablet A is een werknemer 1 uur bezig. Het maken van tablet B kost een werknemer 1,5 uur. Er zijn elk uur 90 werknemers bezig met de assemblage van deze tablets. Er kunnen maximaal 70 tablets per uur worden verpakt. Noem a het aantal tablets per uur van type A en b het aantal tablets per uur van type B.

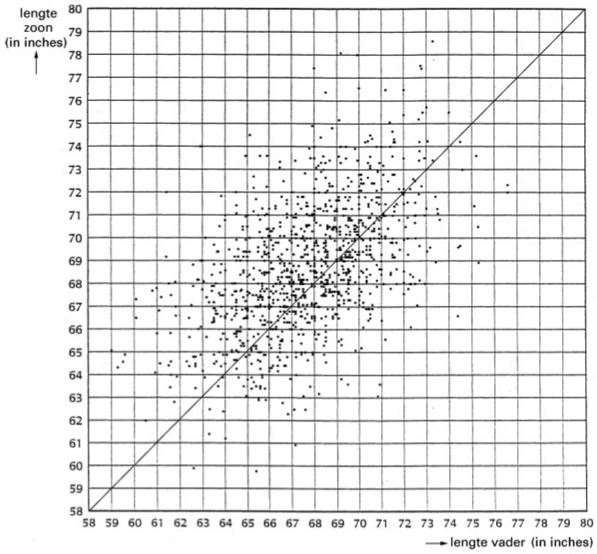
a Aan welke ongelijkheden moeten a en b voldoen?

b Teken het gebied in een a,b-assenstelsel met alle mogelijke combinaties (a,b).

c Tablet A wordt verkocht voor € 240,00 per stuk, tablet B voor € 300,00 per stuk. Hoeveel bedraagt de maximale opbrengst bij de verkoop van deze tablets als de hele productie ook daadwerkelijk wordt afgezet?

Opgave 16: Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak beziggehouden met de statistiek van biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londonse universiteit.



Figuur 5

In de grafiek zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt een vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch = 2,54 centimeter).

In de grafiek is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, zijn de vader en de zoon precies even lang. We noemen een vader en zijn zoon ongeveer even lang als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

a Geef de ongelijkheden die horen bij het gebied dat hoort bij vaders en zonen die ongeveer even lang zijn.

b Kun je aan de hand van het aangegeven gebied in a concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

(naar: examen wiskunde A in 2003, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Teken in een assenstelsel het gebied dat voldoet aan de lineaire ongelijkheden: $x+5y \leq 15$; $0 \leq x \leq 5$ en $y \geq 0$.

Opgave 18

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje ter waarde van € 9,00; in de overige pakjes zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes is € 3000,00. Je wilt berekenen hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 er in de bak zitten. Je noemt het aantal pakjes met een cadeautje van € 9,00 x en het aantal andere pakjes y.

a Aan welke twee formules moeten x en y voldoen?

b Bereken de waarden x en y die aan beide formules voldoen.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.