

3.4 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Stel je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten. (Materiaalkosten zijn bij beide even hoog.) De klus lijkt minstens een dagdeel te duren, welke van beide bedrijven is dan het voordeligst? Om te berekenen vanaf hoeveel uur bedrijf A goedkoper is dan B kun je een lineaire ongelijkheid oplossen.

Je leert in dit onderwerp

- problemen te beschrijven als lineaire vergelijking of ongelijkheid;
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- formules opstellen bij lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 20,00 per uur en € 50,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 37,50 per uur en € 15,00 voorrijkosten. De materiaalkosten zijn bij beide loodgieters even hoog.

De klus lijkt minstens een dagdeel te duren; welke van beide bedrijven is het voordeligst?

Om te berekenen vanaf hoeveel uur bedrijf A goedkoper is dan bedrijf B kun je een lineaire ongelijkheid oplossen.

- Welke ongelijkheid hoort bij dit probleem?
- Los de ongelijkheid op met de grafische rekenmachine.
- Kun je de ongelijkheid ook oplossen zonder de grafische rekenmachine? Hoe dan?



Figuur 1

Uitleg

Je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten.

Je wilt berekenen vanaf hoeveel uur werk bedrijf A goedkoper is dan bedrijf B. Materiaalkosten zijn bij beide bedrijven even hoog, dus daar houdt je geen rekening mee.

De kosten K (euro) die afhangen van het aantal gewerkte uren a zijn:

- Bedrijf A: $K_A = 30 + 25a$
- Bedrijf B: $K_B = 18 + 27,5a$

Deze kosten zijn gelijk als $K_A = K_B$, dus als $30 + 25a = 18 + 27,5a$.

Los deze vergelijking op met de balansmethode:

$$30 + 25a = 18 + 27,5a$$

$$12 + 25a = 27,5a$$

$$12 = 2,5a$$

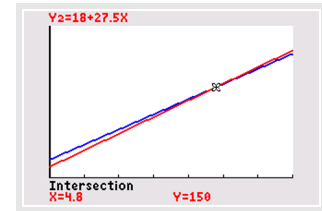
$$a = 4,8$$

A is dus even duur als B bij 4,8 gewerkte uren.

Door $a = 4,8$ in te vullen in één van de kostenformules, vind je ook de kosten: € 150,00.

Ook met de grafische rekenmachine vind je dit.

Als de x -waarden, de gewerkte uren, groter zijn dan 4,8, dan zijn de y -waarden, de kosten, van A kleiner dan die van B.



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** met het oplossen van een ongelijkheid met de balansmethode.

Gegeven is:

- Bedrijf A: $K_A = 50 + 2b$
- Bedrijf B: $K_B = 15 + 12b$

Je lost op: $K_A < K_B$.

- Los eerst de vergelijking $50 + 2b = 15 + 12b$ op met de balansmethode.
- Bereken de kosten bij de berekende waarde van b .
- Maak vervolgens de grafieken van K_A en K_B op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

Opgave 2

Los de ongelijkheid $600 - 0,5x \leq 400 + 1,5x$ op met de balansmethode.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je van twee lineaire verbanden

$$y_1 = ax + b \text{ en}$$

$$y_2 = cx + d$$

het snijpunt $y_1 = y_2$ wilt berekenen, geldt:

$$ax + b = cx + d$$

Dit is een **lineaire vergelijking**.

Een lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode of met de grafische rekenmachine.

De **ongelijkheid** $y_1 < y_2$ oplossen, doe je zo:

- Los de bijbehorende vergelijking $y_1 = y_2$ op.
- Teken de grafieken y_1 en y_2 .
- Lees de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld 1

Een fabriek produceert een artikel dat voor € 12,50 per stuk wordt verkocht. Het maken van een exemplaar kost € 7,50 en de vaste maandelijkse productiekosten zijn € 10000,00. Voor de bedrijfsleiding is de vraag van belang: "Hoeveel exemplaren van dit artikel moeten er maandelijks worden verkocht om winst te maken?" Bereken ook de kosten als er net geen winst, maar ook geen verlies gemaakt wordt.

Antwoord

Winst maken betekent: inkomsten R (euro) zijn groter dan de kosten K (euro). Je wilt het aantal verkochte producten berekenen, dus je zoekt formules voor R en K die afhangen van het aantal verkochte exemplaren q .

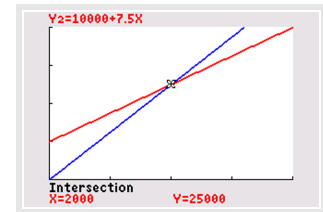
Stel deze formules op:

- inkomsten: $R = 12,50q$
- kosten: $K = 10000 + 7,5q$

Maak hierbij grafieken op de grafische rekenmachine en los de vergelijking $R = K$ op.

Als je de vergelijking oplost met de balansmethode krijg je een idee van de geschikte vensterinstellingen.

$$\begin{aligned} 12,50q &= 10000 + 7,5q \\ 5q &= 10000 \\ q &= 2000 \end{aligned}$$



Figuur 3

Er wordt winst gemaakt bij een verkoop van meer dan 2000 artikelen.

Als de inkomsten en de kosten gelijk zijn, zijn de inkomsten en de kosten $12,50 \cdot 2000 = 25000$ euro.

Opgave 3

Twee kaarsen branden gelijkmatig op. Het verband tussen de lengte L (centimeter) van elke kaars en de brandtijd t (uur) is lineair. Op $t = 0$ worden beide kaarsen aangestoken. Kaars I heeft op dat moment een lengte van 30 cm en brandt met 1,5 cm per uur op. Kaars II heeft dan een lengte van 22 cm en brandt met 0,5 cm per uur op.

- Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor L als functie van t .
- Breng de bijpassende grafieken in beeld met de grafische rekenmachine.
- Bepaal met de grafische rekenmachine vanaf welk tijdstip kaars II langer is dan kaars I.
- Hoe lang zijn de kaarsen als ze even lang zijn?
- In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de bijbehorende gelijkheid met de balansmethode kunt oplossen. Doe dat hier ook.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Ongelijkheid oplossen

Gegeven zijn de lineaire verbanden y_1 en y_2 . Gebruik de balansmethode en los op:

$$y_1 \geq y_2$$

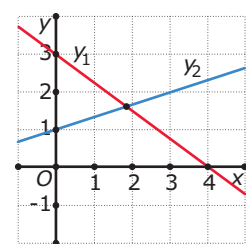
Antwoord

Maak eerst formules met behulp van roosterpunten die op de lijn liggen.

- $y_1 = -\frac{3}{4}x + 3$
- $y_2 = \frac{1}{3}x + 1$

Los de vergelijking $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{1}{3}x + 1$ op met de balansmethode: $x = \frac{24}{13}$.

De oplossing van de ongelijkheid volgt uit de grafiek: $x \leq \frac{24}{13}$.



Figuur 4

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de ongelijkheid $y_1 \geq y_2$ opgelost.

- a In het voorbeeld gaat de grafiek van y_1 door $A(0,3)$ en $B(4,0)$. Laat zien hoe je de bijbehorende formule opstelt. Laat ook zien hoe je de formule opstelt van y_2 waarvan de grafiek door de punten $C(0,1)$ en $D(3,2)$ gaat.
- b Los de vergelijking $y_1 = y_2$ met de balansmethode op.
- c Leg uit hoe je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken afleest.
- d Door in de applet de vier gegeven punten te verplaatsen, kun je andere situaties oefenen.

Voorbeeld 3

Los op, gebruik de balansmethode: $\frac{15-2x}{3} < \frac{x}{5} + 10$.

Antwoord

Dat gaat bijvoorbeeld zo:

$$\begin{aligned} \frac{15-2x}{3} &= \frac{x}{5} + 10 && \text{beiden zijden } \times 15 \\ 75 - 10x &= 3x + 150 && \text{beide zijden } -75 \\ -10x &= 3x + 75 && \text{beide zijden } -3x \\ -13x &= 75 && \text{beide zijden } / -13 \\ x &= \frac{75}{-13} = -\frac{75}{13} \end{aligned}$$

Met behulp van een grafiek op de grafische rekenmachine vind je de oplossing van de ongelijkheid: $x > -\frac{75}{13}$. Maak als toelichting altijd even een schets van die grafieken.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je hoe een lineaire ongelijkheid met gebruik van de balansmethode wordt opgelost. Los de lineaire ongelijkheden op met de balansmethode.

- a $25g - 150 < 18g + 60$
- b $0,8x + 15200 \geq 2x + 8400$
- c $\frac{1}{3}x - 25 > 16 + \frac{1}{2}x$
- d $\frac{2 \cdot g - 8}{4} + 4 \geq 6$

Verwerken

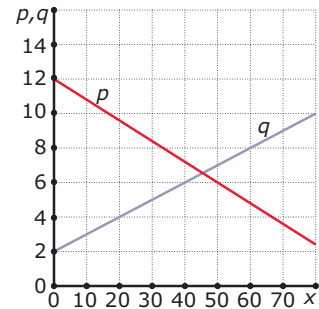
Opgave 6

Een leerlingenvereniging heeft een filmavond georganiseerd voor alle leerlingen van de school. Voor de filmavond heeft de vereniging € 400,00 uitgegeven. Om de gemaakte kosten te betalen, vraagt de vereniging € 2,50 voor een toegangskaartje. Noem de gemaakte winst W en het aantal leerlingen dat komt kijken l .

- a Geef de formule voor W afhankelijk van l .
- b Hoeveel kaartjes moet de vereniging verkopen om geen winst en geen verlies te draaien?
- c Hoeveel kaartjes zijn er verkocht als de winst groter is dan € 1000,00?

Opgave 7

Bekijk de grafieken en los op: $p \leq q$. Rond je antwoord af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5

Opgave 8

Twee personen willen vanaf het station met de taxi naar huis gebracht worden. Ze hebben de keuze tussen de treintaxi en de gewone taxi. De treintaxi kost een vast bedrag van € 3,00 per persoon, de gewone taxi rekent € 2,25 per rit en € 0,75 per gereden minuut.

- Geef een formule voor de kosten K van de gewone taxi, afhankelijk van het aantal minuten m dat de rit duurt.
- Bepaal bij welk aantal minuten het voordeliger wordt om een treintaxi te nemen.
- Bereken wat de rit kost bij dit aantal minuten.
- Beide taxi's rijden door de stad gemiddeld 60 km/h. De twee personen wonen in hetzelfde gebouw, op een afstand van 6 km van het station. Welk type taxi raad je deze personen aan? Licht je antwoord toe met een berekening.

Opgave 9

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op met de balansmethode.

- $55 - 6k = 4k - 25$
- $12 - 4x \geq 36 + 2x$
- $25 - 1\frac{2}{3}t > 30 - 3t$
- $1200 + 0,08a \geq 30 + 0,11a$
- $\frac{6-2x}{5} = \frac{4-x}{4}$
- $200 - (80 - x) = 4(x + 15)$

Opgave 10

Een fabriek produceert een artikel dat voor € 10,00 wordt verkocht. Het maken van een exemplaar kost € 6,50 en de vaste kosten voor het onderhoud van de fabriek, de machines, de lonen, enzovoort zijn € 83000,00. Elk geproduceerd exemplaar wordt verkocht.

- Stel formules op voor de totale opbrengst TO en de totale kosten TK als functie van het geproduceerde aantal q .
- De waarde van q waarbij opbrengst en kosten gelijk zijn, heet het 'break-even-point'. Bepaal dit 'break-even-point' met behulp van de grafische rekenmachine.
- Bereken dit 'break-even-point' ook met de balansmethode.
- Bereken de totale opbrengst en de totale kosten in het 'break-even-point'.
- Bij welke waarden van q wordt er winst gemaakt?
- Bij welke productie wordt er € 50000,00 winst gemaakt?

Toepassen

Opgave 11: Toets lineaire verbanden

De klassen 4 HA en 4 HB hebben eenzelfde toets gemaakt over lineaire verbanden. De 54 leerlingen in de twee klassen haalden samen gemiddeld een 6,4. De leerlingen uit klas 4 HA haalden gemiddeld een 6,8. De leerlingen uit klas 4 HB haalden gemiddeld een 5,9.

Hoeveel leerlingen zitten er in klas 4 HA?

Opgave 12: Kangoeroewedstrijd

Bij de kangoeroewedstrijd (een internationale wiskundige puzzelwedstrijd voor middelbare scholieren) kom je regelmatig problemen tegen die op te lossen zijn door het probleem te beschrijven met een vergelijking. Hieronder vind je daar een paar voorbeelden van.

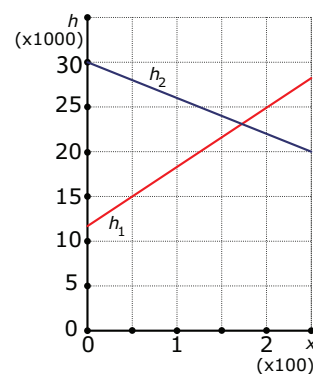
- Over drie jaar zal Steven drie keer zo oud zijn als drie jaar geleden. Over vier jaar zal Steven ... keer zo oud zijn als vier jaar geleden. Welk getal moet er op de puntjes staan?
- In een winkel hebben twee cd's dezelfde prijs. Een van de cd's wordt 5% goedkoper, de andere wordt 15% duurder. Daardoor gaan ze € 6,00 in prijs verschillen. Hoeveel euro gaat de duurste cd kosten?
- Anna, haar moeder en haar vader zijn alle drie in januari jarig. In mei 2007 was Anna's leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar moeder. In mei 2008 was haar leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar vader. Hoeveel jaar is Anna's vader ouder dan haar moeder?
- Fred en Karel gaan tegen elkaar hardlopen. Omdat Karel $\frac{9}{8}$ keer zo snel loopt als Fred, begint Karel met een halve ronde achterstand. Ze starten gelijktijdig. Hoeveel rondes heeft Fred gelopen als Karel hem voor de eerste keer inhaalt?

Testen

Opgave 13

Je ziet twee grafieken van de lineaire verbanden h_1 en h_2 .

Los op: $h_1 \leq h_2$.



Figuur 6

Opgave 14

Een autoverhuurbedrijf verhuurt een Toyota voor € 75,00 per week. De benzinekosten worden geschat op € 0,12 per kilometer. Het bedrijf verhuurt ook een Renault voor € 100,00 per week. De benzinekosten van de Renault zijn ongeveer € 0,10 per kilometer.

- Je wilt de Toyota voor een week huren en je hebt € 125,00. Hoeveel kilometer kun je dan rijden? Beantwoord dezelfde vraag voor de Renault.
- Geef formules voor de kosten per week van de Toyota en de Renault, afhankelijk van het aantal gereden kilometers.
- Teken met de grafische rekenmachine de grafieken voor de kosten per week van de Toyota en de Renault. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt.
- Bereken zowel algebraïsch als met grafische rekenmachine vanaf welk aantal kilometer de Renault goedkoper is.

Opgave 15


Een bedrijf produceert pennen. De productiekosten zijn € 0,25 per pen, de vaste kosten € 100,00 per dag. De pennen worden verkocht voor € 1,50. Vanaf welk aantal verkochte pennen per dag maakt het bedrijf winst?

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden**.

Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
