

## 3.3 Lineaire modellen

### Inleiding

Op grond van meetresultaten kun je een lineair verband tussen twee variabelen veronderstellen. Dat is bijvoorbeeld het geval als meetpunten bij een verband tussen twee variabelen (vrijwel) op een rechte lijn liggen. In dit onderdeel leer je hoe je bij een aantal meetpunten een passende lineaire formule (lineair model) op kunt stellen.

#### Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband herkennen in de grafische weergave van meetpunten;
- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen.

#### Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

### Verkennen

#### Opgave V1

De bevolking van een stad is de laatste decennia gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens.

jaartal	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners ( $\times 100000$ )	2,1	3,3	4,6	5,8	7,0	8,3

Tabel 1

- Maak bij deze tabel een grafiek.
- Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de bevolkingsgroei van deze stad redelijk benadert. Teken die lijn en voorspel het aantal inwoners in 2020 en 2030.

### Uitleg

#### Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Je ziet in een assenstelsel de twee punten  $A$  en  $B$  getekend. Door deze punten gaat een lijn. Tussen  $x$  en  $y$  bestaat een lineair verband. Stel een formule op voor dit verband.

Het gevraagde verband is lineair en heeft dus de vorm:  $y = ax + b$ . Je moet  $a$  en  $b$  vinden.

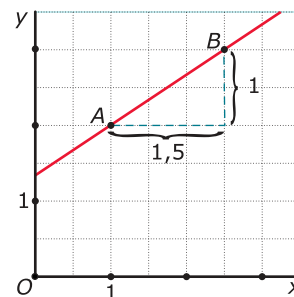
Lees twee coördinaten af:  $A(1,2)$  en  $B(2,5;3)$ . Je ziet als  $x$  toeneemt met  $2,5 - 1$ , dan neemt  $y$  toe met  $3 - 2$ .

De toename per eenheid, de helling is:  $a = \frac{3-2}{2,5-1} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$

Vul het hellingsgetal in de formule in:  $y = \frac{2}{3}x + b$ .

Bereken het begingetal door bijvoorbeeld  $A(1,2)$  in te vullen:  $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$  en dus  $b = 1\frac{1}{3}$ .

De gevraagde formule is:  $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ .



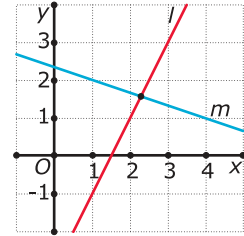
Figuur 1

### Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een formule opstelt bij een lineair verband waarvan twee punten gegeven zijn. Bij een lineair verband hoort een grafiek die door de punten  $(-3,2)$  en  $(17,10)$  gaat. Stel een formule voor dit verband op.

### Opgave 2

Je ziet twee lijnen  $l$  en  $m$ . Het zijn grafieken bij een lineair verband. Stel bij elk van deze lijnen een passende formule op.



Figuur 2

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

#### Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De formule van een lijn door de punten  $A(x_A, y_A)$  en  $B(x_B, y_B)$  heeft de vorm  $y = a \cdot x + b$ .  $a$  is het hellingsgetal;  $b$  de uitkomst bij  $x = 0$

- $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- $b$  bereken je door de coördinaten van één van de twee punten in te vullen.

Soms wordt het verband tussen  $y$  en  $x$  gegeven door meetpunten en kun je door die punten een rechte lijn trekken. Niet alle punten hoeven helemaal op deze lijn te liggen. De formule bij de lijn noem je dan een **lineair model** voor het verband tussen  $y$  en  $x$ .

Toepassingen van het gebruik van lineaire formules en modellen zijn:

- Het berekenen van tussenliggende waarden door te doen alsof de grafiek tussen de meetwaarden lineair is. Dit is **lineair interpoleren**.
- Het berekenen van waarden die eerder of verder liggen. Dus voorspellen, door te doen alsof de grafiek lineair verder loopt. Dit is **lineair extrapoleren**.

### Voorbeeld 1

De bevolking van een stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je gegevens.

tijd (jaar)	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners ( $\times 100000$ )	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 2

Hoe groot zal het aantal inwoners in 2020 en 2030 zijn?

Antwoord

Dit is extrapoleren, ofwel waarden voorspellen.

Kies eerst namen voor de variabelen:

$N$  is het aantal inwoners ( $\times 100000$ ).

$t$  is de tijd in jaren vanaf 1960, dus  $t = 0$  in 1960.

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei dus niet precies lineair is, kun je doen alsof het verband lineair is. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat.

De formule heeft dus de vorm:  $N = a \cdot t + b$ .

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft, gaat door: (20; 5,3) en (50; 9,8). Daarmee bereken je  $a = 0,15$ .

De formule wordt dan:  $N = 0,15 \cdot t + b$ .

Eén van beide punten invullen geeft:  $b = 2,3$ .

Het lineaire model is dus:  $N = 0,15t + 2,3$ .

Met deze formule kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

### Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Teken een  $t, N$ -assenstelsel met daarin de punten die bij de tabel horen. Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn gaat door de punten (20; 5,3) en (50; 9,8).
- Bereken  $a$  en  $b$ .
- Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.
- Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

### Voorbeeld 2

Van 22 scholieren in een havo 4-klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogeheten 'trendlijn' doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft een verband tussen lengte  $L$  (centimeter) en gewicht  $G$  (kilogram). Stel het daarbij passende model op.

Antwoord

De vorm van de formule is:  $G = a \cdot L + b$ .

De lijn gaat ongeveer door: (160,50) en (190,67).

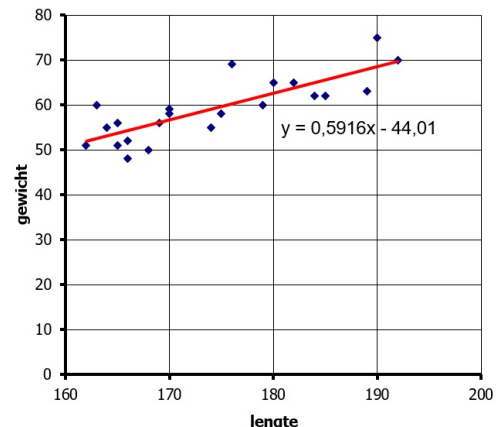
Dus  $a \approx 0,57$ .

De formule wordt:  $G = 0,57L + b$ .

Bijvoorbeeld (160,50) invullen geeft:  $b \approx -41,2$ .

De gevraagde formule is:  $G = 0,57 \cdot L - 41,2$ .

Je ziet overigens dat Excel een iets andere formule geeft. Dat komt omdat Excel de formule niet baseert op het aflezen van punten waar de lijn door zou moeten gaan.



Figuur 3

### Opgave 4

Bekijk de trendlijn in **Voorbeeld 2**.

- Voer de berekening van  $a$  en  $b$  uit.
- Waarom komt er dezelfde waarde van  $b$  uit als je de andere afgelezen coördinaten zou gebruiken om  $b$  te berekenen?
- Stel dat je afleest dat de rechte lijn door (170,56) en (195,70) gaat, wat wordt het model dan?
- Bepaal met het model dat je bij c hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 m uit deze groep zou moeten zijn.

### Opgave 5

Een cilindervormige kaars is 1,5 uur na het aansteken 25 cm lang en 4 uur na het aansteken nog 20 cm lang. In dit geval kun je aannemen dat de lengte  $L$  (centimeter) afhangt van de brandtijd  $t$  (uur) en dat dit verband lineair is.

- a Bereken het hellingsgetal van dit lineaire verband. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?
- b Stel een formule voor  $L$  op.
- c Bereken met behulp van de formule na hoeveel uur deze kaars is opgebrand.

### Voorbeeld 3

Scholen krijgen geld van de overheid. Hoeveel geld hangt af van het aantal leerlingen. Hier zie je het aantal leerlingen van een school in de loop van een aantal jaren. Alle tellingen vonden plaats op 1 oktober.

jaartal	2011	2012	2013	2014
aantal leerlingen	1320	1462	1526	1442

Tabel 3

Het door een berekening voorspellen van het aantal leerlingen in bijvoorbeeld 2015 en 2016 noem je extrapoleren (buiten de meetpunten voorspellen).

Het berekenen van het aantal leerlingen tussen twee bekende meetpunten, bijvoorbeeld 2011 en 2012, noem je interpoleren. Interpoleren heeft hier geen zin, het aantal leerlingen wijzigt immers tijdens een schooljaar bijna niet.

Bepaal met behulp van deze gegevens door lineair extrapoleren hoe het leerlingenaantal in de jaren na 2014 zal verlopen.

#### Antwoord

De veranderingen zijn: +142 in 2012, +64 in 2013 en -84 in 2014. En nu moet je een keuze maken:

- Een voorspelling aan de hand van de laatste twee meetpunten: het laatste jaar waren er 84 leerlingen minder en die terugloop zal zo blijven doorgaan. Dat betekent dat het aantal leerlingen  $a$  na 2014 kan worden voorspeld door:  $a = 1442 - 84 \cdot t$ . Hierin is  $t$  het aantal jaren na 2014.
- Een voorspelling waarbij je het eerst en het laatst bekende jaar gebruikt: de laatste drie jaren kwamen er gemiddeld  $\frac{142+64-84}{3} = 40$  leerlingen bij. Het aantal leerlingen  $a$  na 2014 kan worden voorspeld door:  $a = 1442 + 40 \cdot t$ . Hierin is  $t$  de tijd in jaren na 2014.

Beide voorspellingen gaan uit van een lineair verband. Daarom heet dit lineair extrapoleren. Het werkelijke verloop van het aantal leerlingen zal er wel ergens tussenin liggen.

### Opgave 6

Bekijk de tabel.

$q$	10	20	30	40	50	60	70	80
$p$	22,6	41,3	64,7	78,8	94,8	121,3	138,5	166,2

Tabel 4

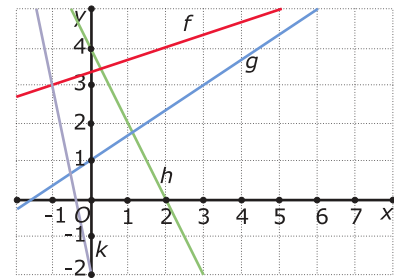
- a De waarde van  $p$  voor  $q = 15$  kun je vaststellen door lineair interpoleren. Je gaat uit van een lineair verband tussen  $p$  en  $q$  waarvan de grafiek door (10; 22,6) en (20; 41,3) gaat. Stel een formule op voor dat lineaire verband en bereken de waarde van  $p$  voor  $q = 15$ .
- b Bereken op dezelfde manier de waarde van  $p$  voor  $q = 42$  door lineair interpoleren.
- c Bereken de waarde van  $p$  voor  $q = 84$  door lineair extrapoleren.

## Verwerken

### Opgave 7

Je ziet vier grafieken van lineaire verbanden.

- Stel een formule van  $f$  op.
- Stel een formule van  $g$  op.
- Stel een formule van  $h$  op.
- Stel een formule van  $k$  op.



Figuur 4

### Opgave 8

Een zuiver cilindervormige kaars is aan het opbranden. Het verband tussen de kaarslengte  $L$  (centimeter) en de brandtijd  $t$  (uur) is lineair. Na 2 uur branden is de kaars 12 cm lang, na 5 uur branden heeft hij nog een lengte van 6 cm. Stel een formule op voor  $L$ .

### Opgave 9

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule:  $s(t) = s(0) + v \cdot t$ , met  $s(t)$  de afgelegde weg (meters) na  $t$  seconden.

- Wat houdt  $s(0)$  in?
- Wat houdt  $v$  in?

Je volgt een auto die op een Franse tolweg door een automatisch tolpoortje rijdt. Neem  $s(0) = 0$  en  $v = 30$  meter per seconde (m/s) voor deze auto.

- Geef de formule en teken de bijbehorende grafiek van de afgelegde weg  $s(t)$ .  
Een andere auto is al eerder door het tolpoortje gereden en heeft 400 meter voorsprong op de auto uit b. Deze auto heeft een snelheid van 20 meter per seconde.
- Geef de formule die bij de beweging van deze auto hoort en teken de bijbehorende grafiek bij de afgelegde weg van de tweede auto in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van de afgelegde weg van de eerste auto.
- Bereken op welk tijdstip de eerste auto de tweede auto inhaalt.

### Opgave 10

Mensen verbruiken veel olie. Gelukkig wordt er nog regelmatig nieuwe olie gevonden, maar ooit raakt de olie op. De 'reserves' olie is de hoeveelheid olie die naar schatting nog uit de grond gehaald kan worden. De 'olieconsumptie' is de hoeveelheid olie die gebruikt wordt. Hoeveelheden olie worden uitgedrukt in vaten. Eén vat is 159 liter olie.

In 2003 was de olieconsumptie in de Verenigde Staten 20071000 vaten per dag. In 2003 hadden de Verenigde Staten ongeveer 293 miljoen inwoners.

- Bereken de olieconsumptie in de Verenigde Staten in 2003 in liters per inwoner per dag.  
Aan het eind van 2003 waren de reserves in de hele wereld 1147,7 miljard vaten. Als de wereldolieconsumptie per jaar steeds gelijk zou blijven aan die van 2003, dan zouden deze reserves 41 jaar later helemaal verbruikt zijn: er is dan geen olie meer.
- Bereken hoeveel vaten olie per dag in de wereld geconsumeerd werden in 2003. Geef je antwoord in miljoenen.
- Je mag aannemen dat er geen nieuwe olie wordt gevonden. Stel formules op die beschrijven hoe de reserves  $R$  en de consumptie  $C$  (beide in miljarden vaten) in de loop van de tijd  $t$  (jaar) vanaf eind 2003 ( $t = 0$ ) veranderen.

### Opgave 11

Er bestaat een verband tussen het aantal ademhalingen  $A$  dat een mens per minuut maakt, en de polsslag  $P$  in slagen per minuut. Een arts onderzoekt een groepje van vijftien mensen en krijgt de volgende meetwaarden:

$A$	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	30	34	36	41	44
$P$	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	91	94	105	116	120

Tabel 5

- Zet de gegevens uit de tabel in een grafiek. Zet  $A$  op de horizontale as.
- Bestaat er een lineair verband tussen  $A$  en  $P$ ? Licht je antwoord toe.
- Trek een rechte lijn door de punten  $(16,57)$  en  $(44,120)$ . Geeft deze lijn een zo goed mogelijke weer-gave van het verband? Licht je antwoord toe.
- Stel een formule op bij de getekende lijn.
- Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen bij 20, 24 en 28 ademhalingen per minuut. Wijken deze waarden veel af van de gemeten waarden?
- Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen van iemand met 32 ademhalingen per minuut.
- Het aantal polsslagen uit f kun je ook benaderen door het gemiddelde van 91 en 94 te nemen. Waar-om? Licht deze waarde dicht bij de waarde die je bij f berekend hebt?

### Opgave 12

Een onderzoeker wil weten of er een verband bestaat tussen het aantal eitjes  $N$  dat een zalm legt en de lengte  $L$  (centimeter) van een zalm. Je ziet de door hem gevonden gegevens in de tabel.

$L$	52	58	66	68	73	74	78	90
$N$	5620	7410	9805	10390	11890	12200	13380	17010

Tabel 6

- Onderzoek of er bij benadering een lineair verband bestaat tussen  $N$  en  $L$ .  
Stel in dat geval een formule op voor  $N$ , waarbij je de kleinste en grootste waarde van  $L$  uit de tabel gebruikt.
- Geef een zo goed mogelijke schatting van het aantal eitjes dat een zalm van 85 cm lengte legt.
- Een zalm legt 4500 eitjes. Hoe lang zal deze zalm ongeveer zijn?
- Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal eitjes dat een zalm van 120 cm lengte legt. Denk je dat dit een realistische schatting oplevert? Licht je antwoord toe.

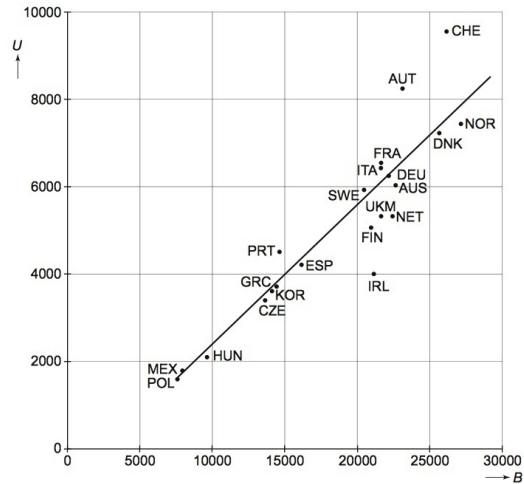
## Toepassen

### Opgave 13: Onderwijsuitgaven

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) doet jaarlijks onderzoek naar de onderwijsuitgaven van de landen die bij deze organisatie zijn aangesloten. In de grafiek is voor deze landen af te lezen hoeveel geld de overheid uitgeeft per leerling per jaar in het voortgezet onderwijs.

Op de horizontale as staat  $B$ , het bruto binnenlands product (bbp) per hoofd van de bevolking in euro's. Verticaal staat  $U$ , de uitgaven per leerling per jaar in euro's. Nederland staat in de grafiek met NET aangegeven.

In Nederland zijn de uitgaven per leerling per jaar voor alle schoolsoorten in het voortgezet onderwijs (vmbo, havo en vwo) ongeveer gelijk. Een havo leerling behaalt het diploma gemiddeld in 5,4 jaar.



Figuur 5

- a Bereken hoeveel geld de Nederlandse overheid gemiddeld uitgeeft aan de havo-opleiding van een leerling die een havo-diploma behaalt.

In de grafiek is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij de punten past. Een land dat op de lijn ligt en een bbp van € 10000,00 heeft, zou dan € 2400,00 per leerling per jaar uitgeven. Een land op de lijn met een bbp van € 25000,00 zou dan € 7200,00 per leerling per jaar uitgeven.

Het punt van de Verenigde Staten ligt op die lijn en heeft met € 36800,00 het hoogste bbp van alle landen. Door deze hoge waarde van  $B$  is dit punt niet zichtbaar in de grafiek.

- b Stel een vergelijking van de lijn op en bereken daarmee de uitgaven per leerling per jaar in de Verenigde Staten.

(bron: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

### Opgave 14: Vrouwelijke huisartsen

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar hun aantal neemt toe. Bekijk de figuur. Ga ervan uit dat het verband lineair is.

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen  $H_V$  na  $t$  jaar, met  $t = 0$  op 1 januari 1990, is te schrijven als:  $H_V = a \cdot t + 1078$ . De waarde van  $a$  is ongeveer 106.

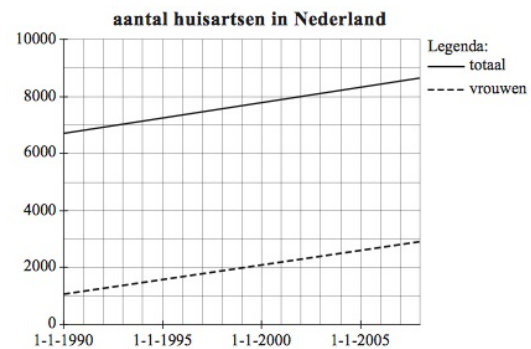
- a Bereken  $a$  in één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen  $H_T$  neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule:  $H_T = 107 \cdot t + 6703$ , met  $t$  in jaren en  $t = 0$  op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor  $H_T$  en  $H_V$  is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

- b Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

(bron: pilotexamen wiskunde A havo in 2013, eerste tijdvak)



Figuur 6

## Testen

### Opgave 15

Het aantal eenpersoonshuishoudens in Nederland is in de periode 2000 - 2013 lineair toegenomen. Volgens gegevens van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) waren er in Nederland in 2010: 2670 ( $\times 1000$ ) en in 2013: 2802 ( $\times 1000$ ) éénpersoonshuishoudens.

Stel een formule op voor het aantal eenpersoonshuishoudens  $N$  (in duizendtallen) als functie van de tijd  $t$ . Kies  $t = 0$  in 2000.

### Opgave 16

De overheid is er door allerlei maatregelen in geslaagd het aantal verkeersdoden tussen 1970 en 2010 terug te dringen. De cijfers staan in de tabel:

jaar	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
aantal doden	3516	3005	2521	1997	1488	1277	1158	817	640

Tabel 7

- Laat zien dat het aantal verkeersdoden in de periode 1970 - 1990 (ongeveer) lineair afneemt.
- Schat met behulp van lineair interpoleren het aantal verkeersdoden in 1982.
- Geef een formule voor het verband tussen het aantal verkeersdoden  $N$  en de tijd  $t$  (in jaren) voor de gehele periode 1970-1990. Neem  $t = 0$  in 1970.
- Bepaal met behulp van lineair extrapoleren het aantal verkeersdoden in 2020. Gebruik daarvoor de gegevens uit de periode 2005-2010. Waarom is het lineair extrapoleren met deze gegevens riskant?





© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

