

3.2 Lineaire formules

Inleiding

Veel situaties die wij in het dagelijks leven tegenkomen, zijn te beschrijven als lineair verband tussen twee variabelen. In dit onderdeel leer je lineaire verbanden herkennen, er formules voor opstellen en deze formules te gebruiken om grafieken te maken en berekeningen uit te voeren.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- een passende formule bij een in woorden beschreven lineair verband opstellen;
- de grafiek van een lineair verband tekenen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij formules;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en begingetal.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater zijn in een bepaalde regio € 0,93 per kubieke meter (m^3) en het vastrecht is € 62,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 0,93 \cdot a + 62$, waarin a het jaarverbruik (m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

- Breng de grafiek van K als functie van a mooi in beeld op de grafische rekenmachine.
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zijn er jaren dat een huishouden in deze regio meer dan € 1000,00 aan water kwijt is?

Uitleg

De kosten voor leidingwater zijn in een bepaalde regio € 1,25 per verbruikte kubieke meter en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule:

$$K = 1,25 \cdot a + 65$$

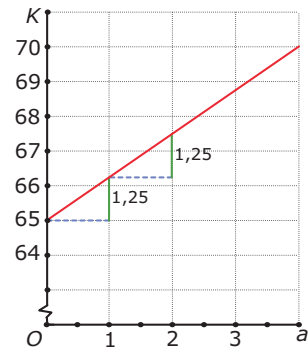
waarin a het jaarverbruik (m^3) en K de jaarlijkse kosten.

Zelfs als je geen water verbruikt, betaal je € 65,00 vastrecht per jaar voor de aansluiting. Dus bij $a = 0$ hoort $K = 65$.

Vervolgens zorgt elke extra kubieke meter water die je verbruikt, voor een toename van K met 1,25. Dit betekent dat elke toename van a met 1 een stijging van K met 1,25 tot gevolg heeft. Zie de figuur. De grafiek wordt daarom een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt.

Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat ('linea recta' betekent 'volgens een rechte lijn'). Het getal 1,25 noem je het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag verbruikt. Dit betekent 45260 liter per persoon per jaar. Als een gemiddeld huishouden uit vier personen bestaat, dan is dit 181040 liter per jaar voor zo'n huishouden. Omgerekend naar kubieke meter is dit 181,04 m³ per jaar. Met behulp van de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ bereken je de kosten voor een gemiddeld huishouden in deze regio. Dit is € 291,30 per jaar.



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m³ met een vastrechtbedrag van € 70,00 per jaar.

- Welke formule beschrijft het verband tussen K en a , als a het jaarverbruik in m³ voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m³ toeneemt?
- Wat betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m³ water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- Bij welke vensterinstellingen van de grafische rekenmachine krijg je de grafiek van K zo in beeld dat voor een verbruik tot 300 m³ de kosten zijn af te lezen uit de grafiek?
- Voor welke waarde van a geldt: $K = 250$? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

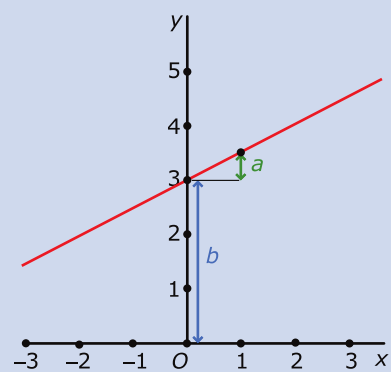
Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x ;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

Je zegt ook wel dat y een **lineaire functie** is van x .

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



Figuur 3

Voorbeeld 1

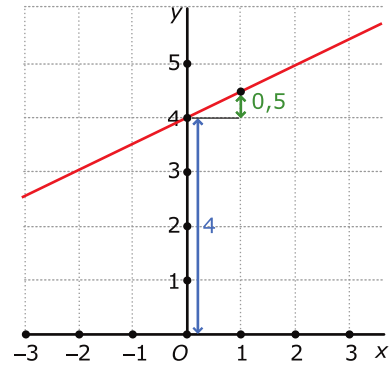
Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Antwoord

Er zijn twee manieren om dit te doen:

- Manier I: het begingetal is 4, dus de grafiek 'start' in (0,4). Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt (0,4) ga je elke keer dat de x -waarde met 1 toeneemt, 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden. Dit betekent dat de grafiek ook door (1; 4,5), (2,5) en (3; 5,5) gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
 Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
 Bij $x = 6$ hoort $y = 7$.
 Trek de lijn door de twee bijbehorende punten (0,4) en (6,7).



Figuur 4

Opgave 2

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

Gegeven is een lineair verband $y_1 = -0,2x + 6$.

- Waaraan kun je zien dat de bijbehorende grafiek dalend is?
- Plot de grafiek en bepaal behalve het hellingsgetal ook de snijpunten met de assen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek met de x -as.
- Het lineaire verband y_2 heeft hetzelfde hellingsgetal, maar de grafiek gaat door (10,9). Bepaal de formule van y_2 .

Opgave 3

Elk lineair verband heeft een formule van de vorm $y = ax + b$.

- Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van dit verband in beeld op de grafische rekenmachine. Gaat de grafiek door (99,200)?
- Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van de lineaire verbanden voor verschillende waarden van b . Voor welke waarde van b gaat de bijbehorende grafiek door het punt (99,200)?
- Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van de lineaire verbanden voor verschillende waarden van a . Voor welke waarde van a gaat de bijbehorende grafiek door het punt (99,200)?

Voorbeeld 2

Als een loodgieter een reparatie bij iemand uitvoert, vraagt hij voorrijkosten, een uurtarief en materiaalkosten. Een loodgieter vraagt € 35,00 aan voorrijkosten en het uurtarief is € 28,50. Als je niet op de materiaalkosten let, zijn de arbeidskosten A in euro's alleen afhankelijk van de gewerkte tijd t in uren. Stel een formule voor A op.

Antwoord

Deze loodgieter kost als je hem belt om te komen, in elk geval € 35,00. Elk gewerkt uur kost nog eens € 28,50, dus t uur werken kost $t \cdot 28,50$ euro.

De formule is dus: $A = 28,50 \cdot t + 35$

Opgave 4

Voor een rit met een taxi betaal je € 3,50 voorrijkosten en nog eens € 1,20 per gereden kilometer. Hierbij past een lineair verband tussen de ritprijs R en het aantal gereden kilometers a . In **Voorbeeld 2** zie je hoe je in zo'n situatie een formule voor dit lineaire verband opstelt.

- Stel een formule op die het verband tussen R en a beschrijft.
- Welk getal is de richtingscoëfficiënt van R ?
- Waarom heeft het nulpunt van R hier geen betekenis?
- Hoeveel betaal je voor een rit van 16 km?
- Hoeveel kilometer heb je gereden als je € 31,10 moet betalen?
- Betaal je voor een twee keer zo lange rit ook twee keer zo veel?

Voorbeeld 3

De temperatuur van de buitenlucht hangt onder sommige omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballonvaart kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van 0,6 °C betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24 °C is. Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (°C) afhankelijk van de hoogte (meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0 °C komt.

Antwoord

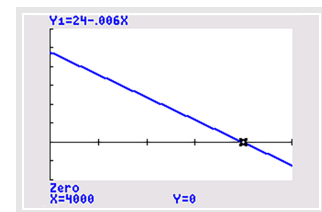
De temperatuurdaling per meter is: $\frac{0,6}{100} = 0,006$ °C

De formule is daarom $T = -0,006 \cdot h + 24$ als h de hoogte in meters en T de temperatuur in °C.

Maak vervolgens met de grafische rekenmachine een geschikte grafiek. Zorg ervoor dat het nulpunt (snijpunt met de x -as) in beeld komt.

Bepaal met de grafische rekenmachine dat de temperatuur 0 °C is als $h = 4000$ meter.

Het nulpunt kun je ook uitrekenen door de vergelijking $24 - 0,006h = 0$ op te lossen.



Figuur 5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** heb je gezien dat de temperatuur lineair afhangt van de hoogte boven de zeespiegel.

- Licht toe hoe je aan de formule $T = -0,006h + 24$ komt.
- Bereken algebraïsch het nulpunt van T .
- Geef aan welke vensterinstellingen je gebruikt om de grafiek van T goed in beeld te krijgen.
- Hoe hoog is de temperatuur volgens de formule op de top van Mount Everest (8848 meter boven de zeespiegel) als het op een hoogte van 0 meter 24 °C is?

Verwerken

Opgave 6

Het huren van een bepaald type auto bij een autoverhuurbedrijf kost per week $g = 0,09k + 75$. Hierbij is k het aantal gereden kilometers en g de kosten in euro's.

- Het verhuurbedrijf vraagt een vast bedrag per week. Welk bedrag is dat?
- Hoe groot zijn de kosten per gereden kilometer?
- Geef de formule voor de kosten van een huurauto die per week € 12,50 duurder is en die per kilometer € 0,10 kost.

Opgave 7

Bereken van de volgende lineaire formules algebraïsch de snijpunten van de bijbehorende grafieken met de assen. Doe dat zonder de grafische rekenmachine te gebruiken.

- a $y_1 = 3x - 5$
- b $y_2 = x - 4$
- c $y_3 = -0,5x + 4$
- d $y_4 = -2(x + 3)$

Opgave 8

Bekijk de tabel.

gewerkte uren u	0	2	5	9	10
kosten k (euro)	65	135	240	380	415

Tabel 1

- a Leg uit waarom tussen k en u een lineair verband kan bestaan.
- b Waaruit blijkt dat k niet recht evenredig is met u ?
- c Welke formule past bij de tabel?
- d Bereken met de juiste formule de kosten als er zes uur is gewerkt.
- e Bereken de kosten als er 2 uur en 50 minuten is gewerkt.

Opgave 9

De winst w (euro) van een feestavond hangt af van het aantal bezoekers n .

De formule is: $w = 2,5n - 300$.

- a Bereken de winst als het aantal bezoekers 200 is.
- b Wat is de betekenis van -300 in deze formule?
- c Wat is de betekenis van het getal $2,5$?
- d Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van w met de horizontale as. Wat is de betekenis van dit punt?

Opgave 10

Chiara en Leyla werken op zaterdag in de supermarkt en verdienen daar € 4,50 per uur. Zij overwegen om voor een callcenter te gaan werken om klanten te werven voor het energiebedrijf. Het basisloon ligt daar met € 3,20 per uur weliswaar wat lager, maar bij het callcenter krijg je per geworven klant een extra bedrag van € 2,00.

- a Chiara wil op zaterdag maximaal acht uur werken. Onderzoek hoeveel klanten Chiara moet werven om bij het callcenter meer te gaan verdienen dan bij de supermarkt.
- b Leyla denkt dat zij op zaterdag in staat is om drie, vier of vijf klanten te werven. Teken grafieken van het dagloon van Leyla in deze situaties. Onderzoek met deze grafieken hoelang (uur) Leyla maximaal mag doen over het werven van klanten om niet minder te gaan verdienen dan in de supermarkt. Rond af op halve uren nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 11: Gala

De vertegenwoordiger van het volleybalmerk 'Gala' verkoopt in Nederland via internet volleyballen voor € 48,00 per stuk. Het merk stelt daarnaast een bedrag van € 1000,00 beschikbaar aan de vertegenwoordiger om het merk te promoten. De vertegenwoordiger koopt de ballen in voor € 30,00 per stuk. Daarnaast heeft hij vaste kosten van € 2500,00.

- Stel formules op voor de kosten k en de opbrengst r afhankelijk van het aantal verkochte volleyballen b .
- Maak de grafieken van k en r met de grafische rekenmachine en ga met behulp van deze grafieken na hoeveel volleyballen de vertegenwoordiger moet verkopen om winst te maken.

Opgave 12: Fooi

Uit Amerikaans onderzoek in horecagelegenheden blijkt dat er tussen de fooi F in dollars en de hoogte van de rekening R in dollars een lineair verband bestaat. Een onderzoeker vond de volgende gegevens:

Bij een rekening van \$ 20,00 hoort een fooi van \$ 4,00.

Bij een rekening van \$ 80,00 hoort een fooi van \$ 13,00.

- Stel een formule op bij dit lineaire verband tussen F en R .
- Een ober brengt een klant een rekening van \$ 45,00. Hoeveel fooi kan de ober verwachten?

Testen

Opgave 13

Een waterleidingbedrijf vraagt naast een bedrag van € 0,08 per kubieke meter (m^3) water een vast bedrag van € 40,00 per jaar aan haar klanten.

- Maak een tabel voor het verband tussen het aantal verbruikte m^3 water w en het te betalen bedrag p . Teken de grafiek van p als functie van w .
- Wat betaalt iemand die geen water gebruikt per jaar? Waar vind je dit terug in de grafiek?
- Geef de formule voor het verband tussen p en w .
- Wat verandert er aan de grafiek en aan de formule als het vaste bedrag wordt verhoogd tot € 50,00?

Opgave 14

Gegeven is het lineaire verband: $y = 4x + 10$.

- Bereken de snijpunten van de grafiek van dit verband met de x -as en de y -as.
- De grafiek van dit verband wordt drie eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- De grafiek van een andere lineaire functie gaat door de punten $(0,10)$ en $(10,15)$. Welke formule past bij deze grafiek?



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
