

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- verband tussen twee variabelen — functie, invoerwaarde, uitkomst — gelijkwaardige formules
- grafieken — snijpunten met assen — toppen — asymptoten
- vergelijking — oplossing van een vergelijking
- ongelijkheid — oplossing van een ongelijkheid
- verband tussen drie variabelen — grafiekenbundel

Activiteitenlijst

- formules herschrijven (balansmethode) — een variabele uitdrukken in een andere variabele
- karakteristieken van grafieken bepalen
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en/of terugrekenen
- ongelijkheden oplossen
- grafiekenbundel tekenen — verbanden met meerdere variabelen combineren

Achtergronden

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente “uitvinding”.

De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540 - 1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d’Oresme (1323 - 1382)** voor zijn natuurkundige onderzoeken de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596 - 1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x , y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y , waarin a en b constanten zijn.



Figuur 1 François Viète

Testen

Opgave 1

Los deze vergelijkingen algebraïsch op. Geef eventueel benaderingen van je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

- $1220 + 0,35q = 2056 + 0,12q$
- $-0,15(x + 25)^2 + 15 = 0$
- $4 \cdot t^2 = 12$
- $\frac{350}{20+0,25d^2} = 7$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2 + \sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Los de ongelijkheden op met de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op één decimaal.

- a $2 \cdot x^3 + 7x < 10$
- b $2 \cdot x^2 + 5 > 7x$

Opgave 4

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

- a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.
- b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten? Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?
- c Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?
- d Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?
- e Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Verklaar je antwoord.

Opgave 5

De voeding van een melkkoe bestaat vooral uit ruwvoer, zoals gras en hooi. Om een melkkoe meer melk te laten geven, wordt deze bijgevoerd met krachtvoer. De onderzoekers hebben een verband geformuleerd tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die zij produceert. Er geldt: $M = -0,04 \cdot V^2 + 1,05 \cdot V + 27,2$. Hierin is V de hoeveelheid krachtvoer in kg per dag en M de melkproductie in kg per dag.

Voor de melkveehouder is vooral de winst W in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van € 0,29 per kg en een krachtvoerprijs van € 0,20 per kg is: $W = 0,29 \cdot M - 0,20 \cdot V$.

- a Bereken de winst W wanneer een koe 4 kg krachtvoer per dag krijgt.

Als je de formule van M invult in de formule van W , ontstaat een formule die je kunt herleiden tot de vorm $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$.

- b Laat deze herleiding zien.

(bron: examen 2014 - I)

Opgave 6

De opbrengst R (in euro) bij de verkoop van een bepaald artikel hangt af van het aantal stuks q dat je verkoopt en van de prijs p (in euro) per stuk. In bepaalde economische omstandigheden hangt de verkochte hoeveelheid q af van de prijs p volgens de formule: $q = 4000 - 200p$.

- a Bereken de opbrengst bij een prijs van € 2,50 per stuk.
- b Bij welke prijs per stuk is er een opbrengst van € 18000,00?
- c Laat zien dat er een maximale opbrengst is van € 20000,00.
- d De verkoop van een bepaald product levert een zekere opbrengst op, maar brengt ook vaak kosten met zich mee. De winst is daardoor lager dan de opbrengst. Geef twee redenen waarom er kosten worden gemaakt. Geef ook een reden waarom die kosten van q af zullen hangen.
- e Er is een verband tussen R en q . Stel een formule op die dat verband aangeeft.
- f Voor de kosten K geldt: $K = 5000 + 15q$. Voor de winst W geldt: $W = R - K$. Stel een formule op voor de winst afhankelijk van q en bereken bij welke verkochte hoeveelheid de winst maximaal wordt.

Toepassen

Opgave 7: Koolmonoxide

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rij-snelheid. Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4,4 + \frac{196,0}{v}$. Bij een koude motor geldt:

$u = 6,9 + \frac{298,5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

- Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot afneemt als de snelheid toeneemt?
- De uitstoot van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?
- Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid. Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?
- Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4,4L + 0,054T$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers en T de rijtijd in seconden. Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Opgave 8: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

- Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 m. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?
- Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan nog berekenen. Stel een formule op die D uitdrukt in v .
- In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Opgave 9: Macro-economische modellen

Bij macro-economische modellen wordt de huishouding van een compleet land met meerdere formules en variabelen beschreven. De volgende vergelijkingen vormen zo'n macro-economisch model:

$$EV = C + I + O$$

$$C = 0,75 \cdot (Y - B)$$

$$I = 29$$

$$O = 40$$

$$B = 0,2 \cdot Y + 12$$

$$Y = EV$$

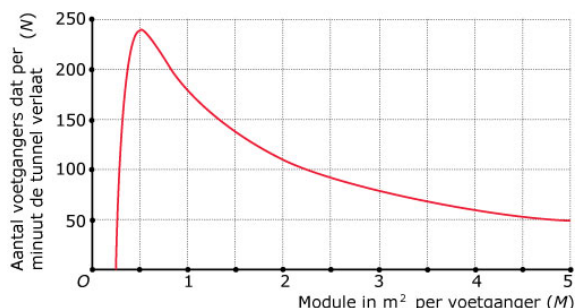
Bij de variabelen EV , C , I , O , B en Y gaat het om miljarden euro. De eerste vergelijking van het model noemen economen wel de definitievergelijking, want eigenlijk spreek je met die vergelijking alleen af wat je onder de effectieve vraag verstaat. De daarop volgende vier vergelijkingen heten de gedragsvergelijkingen. Die laten zien hoe voor een bepaalde economie C , I , O en B van het nationaal inkomen Y afhangen. In deze economie geven de particulieren bijvoorbeeld driekwart van het totale te besteden inkomen $Y - B$ uit aan consumptiegoederen. De zesde vergelijking is de evenwichtsvoorwaarde: de vraag is even groot als het nationaal inkomen.

Door deze zes vergelijkingen met elkaar te combineren kun je het nationaal inkomen van dit land uitrekenen en daarmee alle variabelen. Laat zien hoe dat gaat.

Examen

Opgave 10: Treinreizigers te U

Treinreizigers kunnen op een station de uitgang van dat station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddeld aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 2

- a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,5}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

- b Bereken de module bij een snelheid van 50 meter per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.

Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur.

- d Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel voetgangers er per minuut de tunnel verlaten in geval de snelheid van de voetgangersstroom 70 meter per minuut is.
- e Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt. Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen havo wiskunde A in 1989, tweede tijdvak)

Opgave 11: Knikkers in een pot

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs. Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.



Figuur 3

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule: $I_{\text{knikker}} = 0,5236d^3$

Hierin is d de diameter van de knikker in cm en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3 .

Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van 1,3 cm hebben.

- a** Geef een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

Het stappenplan kan worden vertaald in twee formules:

$$I_{\text{knikker}} = 0,5236d^3$$

$$K = \frac{0,64 \cdot I_{\text{pot}}}{I_{\text{knikker}}}$$

De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3 . Je kunt uit deze formules een formule afleiden voor K , uitgedrukt in I_{pot} en d . Deze formule is van de vorm

$$K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

- b** Laat zien hoe je deze formule afleidt en rond de waarde van a af op drie decimalen.

(naar: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak)



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
