2.5 Meerdere variabelen

Inleiding

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen (in kilowatt) dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Met de grafische rekenmachine kun je hierbij voor verschillende waarden van D grafieken maken van P als functie van v.

Je leert in dit onderwerp

- werken met formules met meer dan twee variabelen;
- werken met grafiekenbundels en nomogrammen;
- formules combineren.

Voorkennis

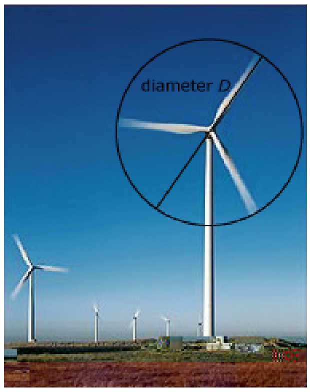
- formules schrijven als functies en dan de grafieken goed in beeld brengen;
- werken met technieken als terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en haakjes uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen (in kilowatt) dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

Met de grafische rekenmachine kun je hierbij voor verschillende waarden van D grafieken maken van P als functie van v.



Figuur 1

a Maak grafieken van P als functie van v voor $D = 10,20,30$ m.

b In een bepaald gebied is de windsnelheid gemiddeld $v = 5$ m/s. Bij welke diameters levert deze windmolen een vermogen van tussen de 10 kW en de 20 kW? Kun je daarbij je grafieken gebruiken?

Uitleg

Het vermogen (in kiloWatt) dat een windmolen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Dit is een formule met drie variabelen: het geleverde vermogen hangt zowel van de windsnelheid als van de grootte van de wieken af. Daarom kun je hierbij niet zo eenvoudig een grafiek maken.

Zie de figuur in **Opgave V1**.

Met de grafische rekenmachine kun je voor verschillende vaste waarden van D grafieken maken van P als functie van v.

- Voor $D = 10$ krijg je $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot 10^2$ en dus $P = 0{,}013v^3$.
- Voor $D = 20$ krijg je $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot 20^2$ en dus $P = 0{,}052v^3$.
- Voor $D = 30$ krijg je $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot 30^2$ en dus $P = 0{,}0117v^3$.

Zo maak je een grafiekenbundel bij P als functie van v. Je kunt dan aflezen hoe het vermogen van de windsnelheid afhangt bij een bepaalde wieklengte. Je kunt ook voor v een aantal vaste waarden kiezen en een grafiekenbundel maken bij P als functie van D. Dan kun je aflezen welke diameter een molen moet hebben om bij een bepaalde gemiddelde windsnelheid een bepaald vermogen te leveren.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de formule voor het vermogen van de windmolen.

a Bereken het vermogen van een windmolen van dit type bij een rotordiameter van 12 meter en een windsnelheid van 5 m/s.

b Bij welke windsnelheid levert deze windmolen (rotordiameter 12 meter) een vermogen van 7000 W?

c P hangt alleen van v af bij $D = 10$. Teken met de grafische rekenmachine een grafiek bij dit verband. Schrijf de ingevoerde formule en de vensterinstellingen op.

d Maak ook grafieken met de grafische rekenmachine van het verband tussen P en v voor $D = 15$ en $D = 8$.

Theorie en voorbeelden

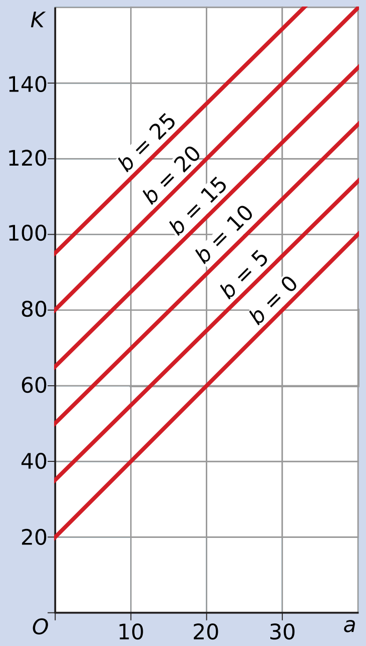
Om te onthouden

Een formule zoals $K = 2a + 3b + 20$ beschrijft een **verband tussen drie variabelen**. Weet je twee van de drie variabelen, dan kun je de derde uitrekenen. Als bijvoorbeeld $a = 10$ en $b = 5$, dan is $K = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 20 = 55$.

Weet je één van de drie variabelen, dan blijft er een verband tussen de andere twee over. Als bijvoorbeeld $b = 5$, dan is $K = 2a + 3 \cdot 5 + 20 = 2a + 35$. Hierbij kun je een grafiek maken. Kies je voor b een rijtje vaste waarden, zoals $b = 0, b = 5, b = 10, b = 15, b = 20$ en $b = 25$, dan kun je een **grafiekenbundel** maken voor K als functie van a. Bij elke b-waarde hoort een nieuwe grafiek, dus je krijgt zes grafieken in dit geval.

In toepassingen zoals rekenmodellen is vaak sprake van meerdere formules met meerdere variabelen. Soms kun je dan het aantal variabelen en het aantal formules terugbrengen door een paar formules met elkaar te combineren. Als bijvoorbeeld gegeven is dat $b = 3a - 2$, dan krijg je:
$K = 2a + 3(3a - 2) + 20 = 2a + 9a - 6 + 20 = 11a + 14$.

Dus als je de twee formules combineert, krijg je $K = 11a + 14$. Zie ook **Voorbeeld 3**.



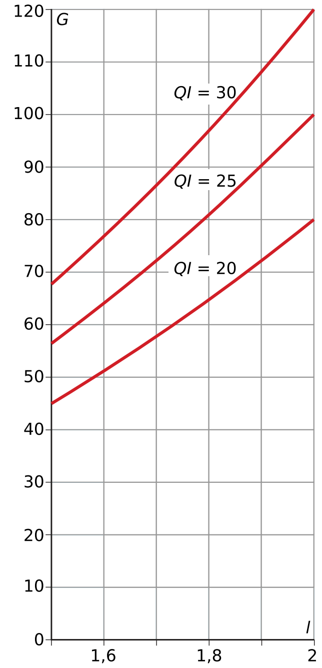
Figuur 2

Voorbeeld 1

Een bekende maat voor iemands gezondheid is de queteletindex (QI) of ook wel *Body Mass Index* (BMI) genoemd. De QI is een maat voor het al dan niet hebben van overgewicht.

De bijbehorende formule is $QI = \frac{G}{l^2}$,

waarin G het gewicht in kilogram en l de lengte in meter is.
Je ziet hier een grafiekenbundel voor G als functie van l voor bepaalde waarden van de QI. Bij een QI vanaf 20 tot 25 heb je een normaal gewicht.
Maak zelf deze grafiekenbundel op de grafische rekenmachine. Hoe zwaar is iemand van 1,75 meter met een normaal gewicht?



Figuur 3

Antwoord

Om deze grafiekenbundel op de grafische rekenmachine te maken moet je de waarden $QI = 20$, $QI = 25$ en $QI = 30$ kiezen.

Bij $QI = 20$ hoort $\frac{G}{l^2} = 20$ en dus $G = 20 \cdot l^2$.

Zo vind je bij de andere waarden van QI de formules $G = 25 \cdot l^2$ en $G = 30 \cdot l^2$.
Deze drie formules voer je in: Y1=20*X^2, Y2=25*X^2 en Y3=30*X^2.
Het venster loopt voor l (dus x) van 1,50 tot 2,00 en voor G (dus y) van 0 tot 120.

Met de formules bepaal je dat iemand van 1,75 m met een normaal gewicht tussen de $20 \cdot 1{,}75^2 = 61{,}25$ en $25 \cdot 1{,}75^2 = 76{,}5625$ kg weegt.

Opgave 2

Bekijk de formule voor de queteletindex in **Voorbeeld 1**.

a Over welke drie variabelen gaat deze formule?

b Stel je voor dat $l = 1{,}95$. Welke formule geeft het verband tussen QI en G? Maak de grafiek van QI als functie van G op de grafische rekenmachine.

c Stel je voor dat $G = 65$. Welke formule geeft het verband tussen QI en l? Maak de grafiek van QI als functie van l op de grafische rekenmachine.

d Stel je voor dat $QI = 20$. Welke formule geeft het verband tussen G en l? Maak de grafiek van G als functie van l op de grafische rekenmachine.

Opgave 3

Gebruik weer de formule voor de queteletindex.

a Maak de grafiekenbundel van **Voorbeeld 1** op de grafische rekenmachine.

b Hoe zwaar is iemand van 1,90 m met een normaal gewicht?

Voorbeeld 2

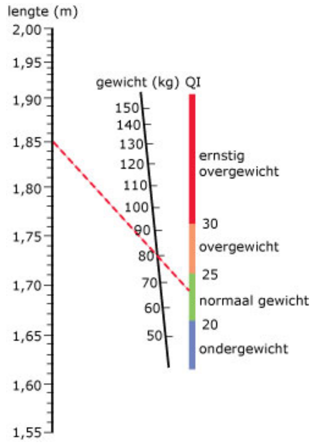
De formule voor de queteletindex is: $QI = \frac{G}{l^2}$.

Je ziet een nomogram waarmee je de QI snel kunt bepalen. Welke QI heeft iemand van 1,85 meter met een gewicht van 80 kg? Controleer de uitkomst met de formule.

Antwoord

Uit het nomogram lees je $QI \approx 23$ af. Met de formule: $QI = \frac{80}{1{,}85^2} \approx 23{,}4$.

Beide waarden stemmen goed overeen. Controleer nog een paar waarden.



Figuur 4

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je een nomogram bij de formule voor de queteletindex.

a Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de queteletindex van iemand met een lengte van 1,75 meter die 75 kg weegt. Licht je antwoord toe.

b Iemand met een lengte van 1,75 meter heeft een gezond gewicht. Tussen welke twee waarden ligt dat gewicht?

c De hoogste queteletindex die iemand met een gezond gewicht kan hebben, is 25. Maak een tabel en een grafiek van het mogelijke gewicht afhankelijk van de lengte. Lees daarbij het gewicht af bij lengtes van 1,60, 1,70, 1,80, 1,90 en 2,00 meter.

d Hoe kun je de grafiek bij c controleren met de grafische rekenmachine?

Opgave 5

Je kunt in het nomogram in **Voorbeeld 2** zien wanneer iemand valt in een van de categorieën ‘ondergewicht’, ‘normaal gewicht’, ‘overgewicht’ en ‘ernstig overgewicht’.

Teken zelf op roosterpapier een grafiekenbundel bij de formule van de queteletindex en geef daarin deze vier categorieën aan.

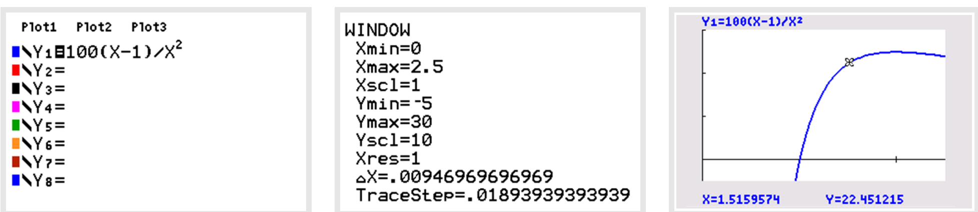
Voorbeeld 3

In **Voorbeeld 1** tref je de formule aan voor de queteletindex: $QI = \frac{G}{l^2}$. Er zijn mensen die beweren dat je een gezond gewicht hebt als het voldoet aan de formule $G = 100(l - 1)$. Laat zien dat in dit geval de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 blijft voor normale lengtes.

Antwoord

Je kunt beide formules combineren door in de formule voor QI de variabele G te vervangen door $100(l-1)$. Je krijgt dan: $QI = \frac{100(l-1)}{l^2}$.

Van deze formule kun je met de grafische rekenmachine een grafiek maken. Je zult dan zien dat voor lengtes tussen de 1,50 m en de 2,20 m de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 ligt.



Figuur 5

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de formule voor een gezond gewicht en die voor de queteletindex met elkaar kunt combineren.

a Maak zelf de grafiek van de QI van iemand met een gezond gewicht als functie van l.

b Ga na dat voor lengtes tussen de 1,50 meter en de 2,20 m de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 ligt.

Opgave 7

a Gegeven zijn de formules $R = 2p + 3q + 20$ en $q = 3p - 2$. Druk R uit in p.

b Gegeven zijn de formules $K = -2t - 5v$ en $t = v - 3$. Druk K uit in v.

c Gegeven zijn de formules $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$. Deze twee formules kun je combineren tot de vorm $y = ax + b$. Welke getallen zijn a en b?

d Gegeven is de formule $Z = \frac{7x}{5y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x.

Verwerken

Opgave 8

Een gemeente wil het water in haar buitenzwembad op 20 °C houden. Dit hoopt men te bereiken door een verwarmingsinstallatie aan te leggen. Omdat je in de zomermaanden ook van de warmte van de zon kunt profiteren, voorspelt een verwarmingsdeskundige dat de verwarmingskosten k zullen voldoen aan de formule: $k = 800 - 60u - 50t$, waarin u het gemiddeld aantal zonuren per dag is en t het gemiddeld aantal graden Celsius dat de buitentemperatuur afwijkt van de 20 °C. k wordt gerekend in euro per dag.

a Welke betekenis heeft het getal 800 in deze formule?

b Op een bepaalde dag is de gemiddelde temperatuur 16 °C. Dan is $t = -4$. Als er die dag 3,5 zonuren zijn, hoe hoog zijn dan de verwarmingskosten?

c Onder welke omstandigheden blijft de temperatuur van het zwembad kosteloos op 20 °C? Beschrijf een paar mogelijke situaties.

d Teken op roosterpapier een grafiekenbundel voor k afhankelijk van u voor $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ en $t = 2$.

e Geef in je grafiekenbundel aan hoe hoog de verwarmingskosten zijn als op een bepaalde dag de zon zes uur schijnt en de temperatuur 22 °C is. Bereken dit antwoord ook met de formule.

f In een bepaalde week varieert de temperatuur tussen 18 °C en 22 °C. Het aantal uren zon per dag varieert van vier uur tot maximaal tien uur. Tussen welke twee bedragen liggen de totale verwarmingskosten voor het zwembad in die week?

Opgave 9

Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Voor een bepaalde waarde van D (de rotordiameter) vind je een verband tussen P en v. P is het vermogen in kW en v de snelheid in m/s.

a Maak met de grafische rekenmachine een tabel met $D = 5$, $D = 10$, $D = 15$ en $D = 20$. Teken vervolgens deze grafiekenbundel. Ga ervan uit dat $0 \leq v \leq 40$.

b Lees in de grafiekenbundel de waarde van P af als $v = 30$ en $D = 10$. Omschrijf hoe je dat doet. Controleer je antwoord met de formule.

c In de grafiekenbundel kun je zien hoe het vermogen bij een bepaalde diameter afhangt van de windsnelheid. Arceer het gebied waarvoor geldt: de diameter ligt tussen de 10 en de 20 meter en de windsnelheid is maximaal 90 km/h.

d Hoeveel bedraagt het maximale vermogen dat kan worden opgewekt met de gegevens uit c?

Opgave 10

Op een camping zijn de prijzen: € 10,00 voor een volwassene, € 5,00 per kind en € 3,00 per standplaats. De bedragen zijn per dag.

a Druk de prijs P uit in aantal volwassenen v en aantal kinderen k.

b Een oom en tante zonder kinderen gaan naar de camping. Ze weten nog niet hoeveel neefjes en nichtjes ze zullen uitnodigen, maar ze willen niet meer dan € 50,00 betalen. Hoeveel kinderen kunnen ze uitnodigen?

c Stel dat $k = 2v + 1$. Druk P uit in v.

d Teken een grafiekenbundel van de prijs. Neem als aantal volwassenen 2, 4, 6 en 8.

e Welke combinaties van volwassenen en kinderen kun je maken voor € 93,00?

Opgave 11

De ANWB adviseert om bij het autorijden een afstand d (in meter) te bewaren die de helft is van je eigen snelheid v in km/h.

a Geef de formule van d als functie van v.

Gemiddeld is een auto 4 m lang. De afstand tussen de voorbumpers van twee auto's is dus $s = 4 + d$ m. Neem aan dat alle auto's zich aan het advies van de ANWB houden, 4 m lang zijn en dezelfde snelheid v hebben.

b De tijd t in seconden tussen twee auto's is nu te berekenen met de formule: $t = \frac{3{,}6s}{v}$. Licht dit toe.

c Stel een formule op voor t als functie van v door formules te combineren.

d Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$. Schrijf de formule op van N als functie van v.

e Er passeren 29,9 auto's per minuut. Hoe hoog is de snelheid v van deze autostroom in km per uur?

Opgave 12

Sophie verkoopt armbandjes en kettinkjes. Haar dagloon L (in euro) wordt gegeven door de formule $L = 1{,}50 \cdot a + 2{,}50 \cdot k + 25$. Hierin is a het aantal armbandjes dat ze verkoopt en k het aantal kettinkjes.

a Stel dat Sophie twintig armbandjes en acht kettinkjes op een dag verkoopt. Wat is dan haar dagloon?

b Stel dat Sophie op een dag twee keer zoveel armbandjes heeft verkocht als kettinkjes. Druk eerst L uit in k en bereken dan hoeveel armbandjes en kettinkjes ze heeft verkocht als haar dagloon € 80,00 is.

c Gegeven is nu dat $a = 2 \cdot k - 4$ en $L = 85$. Hoeveel armbandjes en kettinkjes heeft ze verkocht?

d Op een dag heeft Sophie binnen twee uur alle dertig kettinkjes verkocht. Ze wil die dag een dagloon van meer dan € 100,00 halen. Hoeveel armbandjes moet ze dan die dag verkopen?

Toepassen

Opgave 13: Brandstofverbruik

Hoeveel brandstof een personenauto verbruikt, hangt onder andere af van de af te leggen afstand, de rijstijl en het wachten voor verkeerslichten. Je gaat dit met behulp van een wiskundig model nader onderzoeken. In dit model wordt het brandstofverbruik B (in mL) van een auto berekend met de volgende formule: $B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$ met:

- L = ritlengte in km;
- S = aantal stops onderweg;
- D = totale wachttijd voor verkeerslichten in seconden.

a en b zijn getallen die van de rijsnelheid V (in km/h) afhangen en c is een constante. Voor a, b en c geldt: $a = 170 - 4{,}55V + 0{,}049V^2$, $b = 0{,}0077V^2$ en $c = 0{,}39$. Je laat in dit model optrekken en afremmen buiten beschouwing, zodat je in de uitdrukkingen voor a en b steeds een constante waarde voor V kunt invullen.

a Neem een rit over een km met een snelheid van 50 km/h, twee stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden. Bereken het totale brandstofverbruik.

b Bereken hoeveel procent brandstof er verbruikt wordt met stoppen en wachten tijdens deze rit.

Twee auto's staan voor een stoplicht. 600 meter verderop staat nog een stoplicht. Als de auto's tussen de twee stoplichten met een snelheid van 50 km/h rijden, springt het tweede stoplicht precies op tijd op groen en kunnen ze doorrijden. Houd geen rekening met afremmen en versnellen. Auto 1 rijdt tussen de twee stoplichten steeds met een snelheid van 50 km/h en kan dus doorrijden bij het tweede stoplicht. Auto 2 rijdt met een snelheid van 70 km/h, zodat deze zal moeten stoppen en wachten bij het tweede stoplicht.

c Laat met een berekening zien dat auto 2 ruim 12 seconden voor het verkeerslicht moet wachten.

d Bekijk de eerste 900 meter na het eerste stoplicht . Na het tweede stoplicht komt er geen verkeerslicht meer. Auto 1 rijdt ook daar 50 km/h en auto 2 rijdt daar weer 70 km/h. Onderzoek of auto 2 meer dan twee keer zo veel brandstof nodig heeft als auto 1.

Testen

Opgave 14

Bij de verkoop van een bepaald artikel gelden de formules $TO = p \cdot q$ en $q = 200 - 0{,}5p$, waarin TO de totale maandelijkse opbrengst bij de verkoop van dat artikel is. p is de prijs (in euro) en q is de verkochte hoeveelheid per maand.

a Combineer deze twee formules tot een formule voor TO als functie van q.

b Voor de maandelijkse winst TW geldt: $TW = TO - TK$, waarin $TK = 40q + 9000$ de totale maandelijkse kosten voor dit artikel zijn. Stel een formule op voor TW.

c Bij welke verkoopcijfers wordt winst gemaakt?

Opgave 15

Het subsidiebedrag B dat een sportclub jaarlijks ontvangt, hangt af van het aantal seniorleden s en het aantal junioren j. Er geldt: $B = 1000 + 10j + 5s$.

a Hoeveel subsidie krijgt een sportclub met 60 junioren en 115 senioren?

b Maak op roosterpapier bij deze formule een grafiekenbundel met $B = 1000$, $B = 1500$, $B = 2000$ en $B = 2500$.

c In een bepaald jaar ontvangt men een subsidie van € 1600,00. Er zijn dat jaar 80 senioren. Geef in je grafiek aan hoeveel junioren de club dat jaar heeft. Bereken dit aantal met de formule.

d Al jarenlang ontvangt men een subsidie van tussen de € 1500,00 en de € 1800,00. Geef in je grafiek het bijbehorende gebied aan.

e Het aantal seniorleden blijft ook al jaren constant, ongeveer tachtig personen. Tussen welke aantallen heeft het aantal juniorleden dan gevarieerd?