2.4 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden kilometers per jaar een auto op benzine duurder is dan een auto op diesel. Of hoeveel uur de ene kaars langer brandt dan de andere.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden algebraïsch oplossen;
- ongelijkheden oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- formules schrijven als functies en dan de grafieken goed in beeld brengen;
- werken met technieken als terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en haakjes uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

Kaars I is 25 cm groot en brandt in 8 uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in 10 uur volledig op. Beide kaarsen branden gelijkmatig. Per uur brandt er steeds een vast aantal centimeters op.

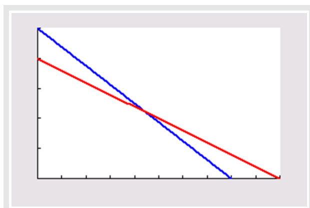
Kaars I is het grootste, maar brandt het snelste op. Hoe lang (in minuten nauwkeurig) is kaars I groter dan kaars II?

Uitleg

In een kaarsenfabriek maken ze twee soorten kaarsen. Kaars I is 25 cm groot en brandt in acht uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in tien uur tijd volledig op. Beide kaarsen branden gelijkmatig. Per uur brandt er steeds een vast aantal centimeter op.

Kaars I is het grootst, maar brandt het snelst op. Hoeveel langer (in minuten nauwkeurig) brandt kaars I vergeleken met kaars II?

Deze vraag kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Je maakt dan eerst formules van de lengte L (in centimeter) van elke kaars afhankelijk van de tijd t (in uren).



Figuur 2

- Kaars I: in acht uur is er 25 cm opgebrand, dus $\frac{25}{8} = 3{,}125$ cm/uur.
  De bijpassende formule is $L_{\text{I}} = 25 - 3{,}125t$.
- Kaars II: in tien uur is er 20 cm opgebrand, dus $\frac{20}{10} = 2$ cm/uur.
  De bijpassende formule is $L_{\text{II}} = 20 - 2t$.

Wanneer je de grafieken plot op de grafische rekenmachine, neem dan de langste lengte en de langste brandtijd van de kaarsen voor de vensterinstellingen zodat je zeker weet dat beide grafieken goed in beeld zijn. Het snijpunt van beide grafieken laat je door de rekenmachine bepalen. Je vindt $t \approx 4{,}44$. Kaars I is langer vanaf $t = 0$ tot en met $t = 4{,}44$ uur. Omdat een uur 60 minuten heeft en geen 100 moet je dit omrekenen naar minuten. Dat is iets minder dan vier uur en 27 minuten.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de vraag: “Hoeveel langer brandt kaars I dan kaars II?” met de grafische rekenmachine wordt opgelost.

a Leg uit dat de formule $25–3{,}125t > 20 - 2t$ hier wordt opgelost.

b Voor het snijpunt van de twee grafieken wordt de grafische rekenmachine gebruikt. Nodig is dat niet. De vergelijking $25 - 3{,}125t = 20 - 2t$ kun je met de balansmethode oplossen. Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.

c Je vindt $t \approx 4{,}444...$ Hoe bereken je dan dat kaars I vier uur en 27 minuten langer brandt dan kaars II?

Opgave 2

Kaars I is 25 cm groot en brandt in acht uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in tien uur tijd volledig op. Kaars III is 30 cm groot en brandt in zes uur tijd volledig op.

Hoelang is kaars III de grootste kaars als alle drie de kaarsen tegelijk worden aangestoken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

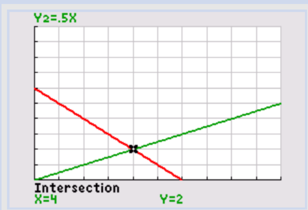
Vragen als: “Hoe hard moet je fietsen om er minder dan acht minuten over te doen?” of: “Hoeveel punten moet je scoren om meer dan een 6 voor je proefwerk te halen?” zijn voorbeelden van ongelijkheden.

Je herkent ongelijkheden aan groterdan- of kleinerdantekens.
Zo is $-x + 6 = 0{,}5x$ een vergelijking en $-x + 6 > 0{,}5x$ een **ongelijkheid**.

Zo’n ongelijkheid los je op door in één figuur de grafieken te tekenen van $y_1 = -x + 6$ en $y_2 = 0{,}5x$. Je ziet dat voor $x = 4$ geldt dat $y_1 = y_2$, dat voor $x < 4$ geldt dat $y_1 > y_2$ en dat voor $x > 4$ geldt dat $y_1 < y_2$.

De oplossing van de ongelijkheid is daarom $x < 4$.

Op dezelfde wijze kun je ook werken met ongelijkheden waarin het gaat om ‘kleiner dan’ (<), ‘kleiner dan of gelijk aan’ (≤) en ‘groter dan of gelijk aan’ (≥) en ‘groter dan’ (>).



Figuur 3

Als je een ongelijkheid algebraïsch moet oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op (bijvoorbeeld met de balansmethode). Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafieken.

Voorbeeld 1

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00 gekocht. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,50 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK. Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden.
Bereken vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7{,}5q$. Hierin is q de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus de ongelijkheid is $7{,}5q > 2000 + 5q$.

Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn. Vervolgens bereken je dit snijpunt door de vergelijking $7{,}5q = 2000 + 5q$ op te lossen. Je vindt (bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine) als oplossing voor de vergelijking $q = 800$ liter.

De oplossing voor de ongelijkheid lees je uit de grafiek af: $q > 800$. Dus vanaf 800 liter verkochte verf gaat de verfhandelaar winst maken.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $7{,}5q > 2000 + 5q$ oplost met de grafische rekenmachine.

a Los de vergelijking $7{,}5q = 2000 + 5q$ algebraïsch op.

b Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op.

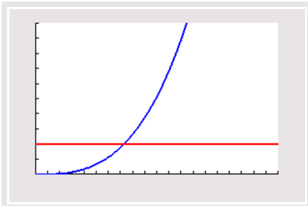
Voorbeeld 2

Je kunt met windmolens elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wieklengte en van de windsnelheid v. Het vermogen van een zekere windmolen wordt gegeven door: $P = 0{,}052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kilowatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Bereken vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt.

Antwoord

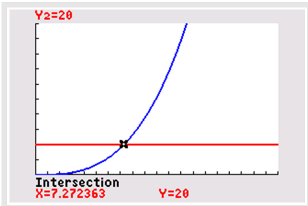
Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat met de grafische rekenmachine:

- Je voert Y1=0.052X^3 en Y2=20 in en brengt de grafieken goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7{,}27; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7{,}27$.



Figuur 4

Belangrijk is nog het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v > 7{,}3$. Je weet dan dat je antwoord ergens boven de 7,25 ligt.



Figuur 5

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de ongelijkheid $0{,}052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

a Los deze ongelijkheid zelf op.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0{,}052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

b Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.

c Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 5

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op biogas kunt gaan rijden. De kosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

a Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

b Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost 80 eurocent per liter en je rijdt 10 km op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen. Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G), afhankelijk van het aantal kilometers (a).

c Je wilt weten hoeveel kilometer je moet rijden om de gastank er weer uit te hebben. Welke ongelijkheid hoort daar bij?

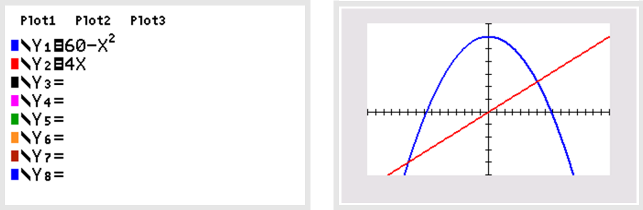
d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Je bekijkt eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$.



Figuur 6

Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk. De snijpunten vind je door op te lossen: $60 - x^2 = 4x$. Je vindt met de grafische rekenmachine: $x = -10 \vee x = 6$.
Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de ongelijkheid $60 - x^2 \geq 4x$ oplost.

a Los zelf deze ongelijkheid met de grafische rekenmachine op. Zorg voor de juiste vensterinstellingen.

b Welke oplossing heeft de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$? De oplossing bestaat uit twee delen.

Verwerken

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $10 - 2x > 4x + 8$

b $60 - x^2 \leq -4$

c $600 + 0{,}05x > 800 + 0{,}025x$

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $3(a - 7) - 9 < 0$

b $(m - 6)^2 > 16$

c $\frac{14}{v-5} \leq 2$

Opgave 9

Los deze ongelijkheid met de grafische rekenmachine op: $x^2 - x > 90$.

Opgave 10

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat deze molen levert, hangt af van de wieklengte en van de windsnelheid v. Stel, het vermogen van een windmolen wordt gegeven door: $P = 0{,}05v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kilowatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Bereken vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 25 kW bedraagt. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 11

Stel, je hebt op 1 januari 2014 een auto gekocht en betaalt € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten van 1,5 eurocent per gereden kilometer. Je hebt ten slotte nog benzinekosten. Je kunt met een liter benzine 15 km rijden en een liter benzine kost € 1,50.

a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?

b Hoeveel kost je deze auto per jaar als je er 16000 km mee rijdt?

c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze auto rijden als je minder dan € 4000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.

d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel een formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Opgave 12

Twee auto's rijden op de A1, beide met een (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 km achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (in kilometer) tot Deventer wordt steeds groter en wordt voorgesteld door a.

a Stel bij beide auto's een formule voor a als functie van t op.

b Bereken na hoeveel minuten auto A door B wordt ingehaald.

c Bereken algebraïsch na hoeveel tijd auto B precies 4 km voor ligt op A.

Toepassen

Opgave 13: Vuurpijl

Een vuurpijl wordt de lucht in geschoten. De hoogte van de pijl (in meter) is $h = -5t^2 + 20t$; met t in seconden.

a Maak de grafiek met de grafische rekenmachine.

b Bereken na hoeveel seconden de pijl de hoogte van 15 m bereikt.

c Bereken hoeveel seconden de pijl hoger is dan 15 meter.

Opgave 14: Dagje Amsterdam

Je wilt met een vriend(in) een dagje naar Amsterdam. Jullie willen weten of het slimmer is om een auto te lenen om de reis van 's-Hertogenbosch naar Amsterdam af te leggen óf om de trein te nemen. Een enkele reis 's-Hertogenbosch – Amsterdam met de trein kost € 14,70. Met de auto betaal je € 0,125 per kilometer. De afstand tussen 's-Hertogenbosch en Amsterdam is 81 kilometer. Maar als je met de auto gaat, moet je ook parkeerkosten betalen. In Amsterdam kost dit € 4,00 per uur.
Bereken het aantal uren u dat jullie in Amsterdam moeten doorbrengen zodat de reis met de trein goedkoper is dan de reis met de auto. Bereken dit eerst algebraïsch. Controleer daarna je antwoord door twee grafieken te tekenen.

Testen

Opgave 15

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $6 - x < 4x - 3$

b $\frac{10}{x} \geq 0{,}25$

c $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 16

Los deze ongelijkheid op (op twee decimalen nauwkeurig) met de grafische rekenmachine: $x^3 > 6 - x$.

Opgave 17

De afstand tussen Utrecht en Enschede is 144 km.

Fietser A gaat met 18 km/h van *Utrecht* naar *Enschede*.
Fietser B gaat met 24 km/h van *Enschede* naar *Utrecht*.

Beide fietsers starten tegelijkertijd.

a Je wilt weten hoe lang fietser A dichter bij Utrecht is dan fietser B. Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?

b Los deze ongelijkheid algebraïsch op.

c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.