

1.5 Combineren en vergelijken

Inleiding

Regelmatig heb je te maken met meerdere grafieken in één figuur. Soms zet je bijvoorbeeld op de verticale as zowel de kosten als de opbrengst uit tegen het aantal verkochte exemplaren. Dan kan het interessant zijn om naar het snijpunt van beide grafieken te kijken. Daar begin je winst te maken... Ook kun je een afzonderlijke winstgrafiek maken door opbrengst en kosten van elkaar af te trekken.

Je leert in dit onderwerp

- grafieken vergelijken en snijpunten aflezen en interpreteren;
- werken met somgrafiek en verschilgrafiek;
- grafieken schakelen.

Voorkennis

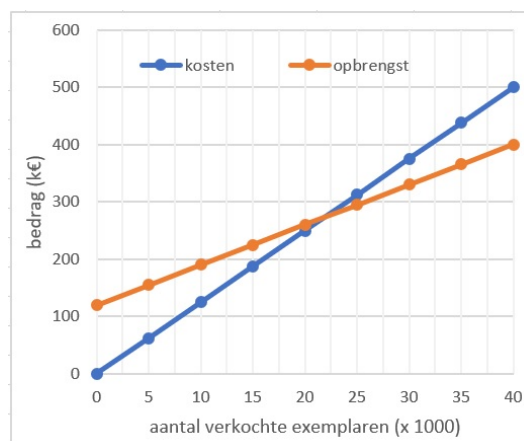
- grafieken tekenen en de eigenschappen van grafieken herkennen;
- waarden uit grafieken aflezen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier in één figuur de opbrengst en de kosten van een fabrikant bij de verkoop van een bepaald artikel. Zowel de opbrengst als de kosten hangen in duizenden euro's (k€) af van het aantal verkochte exemplaren ($\times 1000$).

- Het snijpunt van beide grafieken wordt wel het 'break-evenpoint' genoemd. Begrijp je waarom?
- Teken de grafiek van de winst uitgezet tegen de verkochte hoeveelheid.
- Waar vind je in de winstgrafiek bij b het 'break-evenpoint' terug?



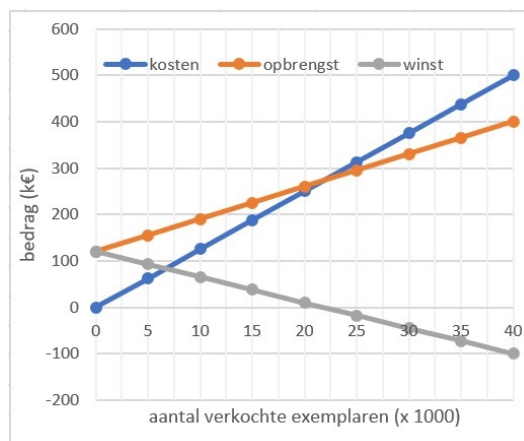
Figuur 1

Uitleg

De figuur laat de opbrengst en de kosten in duizenden euro (k€) zien bij de verkoop van een bepaald artikel.

Beide grafieken ontstaan vanuit tabellen. Zowel de opbrengst als de kosten hangen af van het aantal verkochte exemplaren ($\times 1000$). Ze staan daarom in één figuur. Het snijpunt van beide grafieken heeft een duidelijke betekenis: dan zijn opbrengst en kosten gelijk. De bijbehorende waarde van het aantal verkochte exemplaren kun je aflezen: ongeveer 22000. Bij een verkoop van 22000 of meer is er daarom sprake van winst.

Je kunt hiermee ook de grafiek maken van de winst: je trekt dan opbrengst en kosten van elkaar af. De verschilgrafiek van opbrengst en kosten is de winstgrafiek. Ook aan de winstgrafiek zie je dat de winst pas positief is bij een verkoop van 22000 artikelen of meer.



Figuur 2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafieken van de opbrengst, de kosten en de winst bij de verkoop van een bepaald artikel. Bekijk de tabel van de opbrengst en de kosten.

aantal (×1000)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
opbrengst (k€)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
kosten (k€)	120	148	176	204	232	260	288	316	344	372	400

Tabel 1

- a Laat zien hoe de tabel voor de winstgrafiek uit deze tabel kan worden afgeleid.
- b Kun je het snijpunt van beide grafieken met deze tabellen nauwkeuriger benaderen? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms heb je te maken met meerdere grafieken in één assenstelsel.

Kun je twee variabelen uitdrukken in dezelfde eenheden en hangen beide van dezelfde variabele af, dan kun je de bijbehorende grafieken in één figuur tekenen.

- In een **snijpunt** van beide grafieken hebben de twee variabelen op de verticale as dezelfde waarde.
- Je maakt een **somgrafiek** door steeds bij elkaar passende uitkomsten op te tellen.
- Je maakt een **verschilgrafiek** door steeds bij elkaar passende uitkomsten van elkaar af te trekken.

Heb je te maken met twee grafieken waarbij in de ene grafiek een variabele y afhangt van x en in de andere x weer afhangt van t , dan kun je deze variabelen **schakelen**: bij een waarde van t vind je een waarde van x en dan daarbij weer een passende waarde van y .

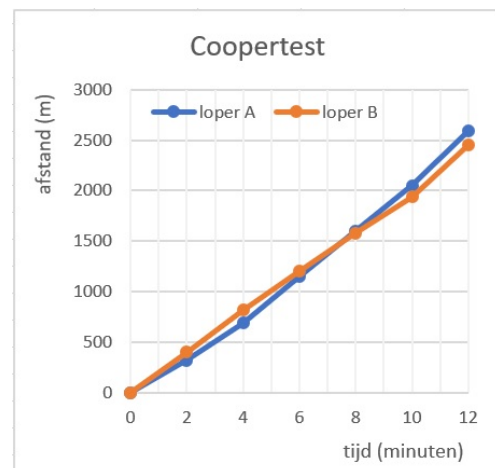
Voorbeeld 1

In de figuur zie je de grafieken van twee lopers die de Coopertest doen. Het gaat om het afleggen van een zo groot mogelijke afstand binnen 12 minuten.

- Hoeveel minuten ligt loper B voor op loper A?
- Wie van beiden levert de beste prestatie?

Antwoord

- Het snijpunt van beide grafieken kun je aflezen (schatten). Dit snijpunt is ongeveer (7,5; 1490). De grafiek van loper B ligt gedurende de eerste 7,5 minuten boven die van loper A. Gedurende die tijd ligt loper B voor op loper A.
- Loper A levert de beste prestatie. Hij loopt ongeveer 2600 meter in 12 minuten.



Figuur 3

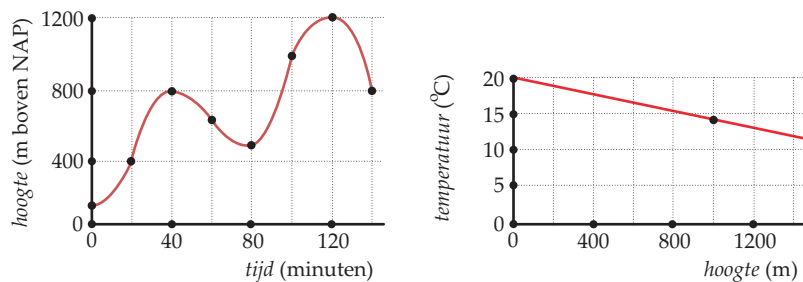
Opgave 2

Bekijk de grafieken van de twee hardlopers in **Voorbeeld 1**.

- a Maak een verschildtabel en een verschilgrafiek.
- b Op welke punten gaat de verschilgrafiek door de horizontale as en wat betekent dit?

Voorbeeld 2

Beide grafieken geven informatie over een bergwandeling. De variabele tijd geeft het aantal minuten na het begin van de wandeling.



Figuur 4

- Hoeveel bedraagt de temperatuur na 80 minuten lopen?
- Hoeveel bedraagt het temperatuurverschil tussen het begin en eind van de wandeling?

Antwoord

- Na 80 minuten lopen is de wandelaar op 500 meter hoogte. In de tweede grafiek zie je dat de temperatuur op die hoogte ongeveer 17 °C is. Op deze manier schakel je de drie variabelen *tijd* → *hoogte* → *temperatuur*.
- Aan het begin van de wandeling is de wandelaar op ongeveer 150 meter hoogte. De temperatuur is dan ongeveer 19 °C. Aan het einde van de wandeling is de wandelaar op 800 meter hoogte. De temperatuur is dan ongeveer 15 °C. Het temperatuurverschil is daarom ongeveer 4 °C.

Opgave 3

Gebruik de grafieken bij de bergwandeling uit **Voorbeeld 2**.

- Hoeveel bedraagt de temperatuur na 40 minuten lopen?
- Hoeveel bedraagt de temperatuur na 100 minuten lopen?
- Bekijk de temperatuur na 60 minuten lopen. Op welke andere twee momenten is de temperatuur gelijk aan dit moment?
- Hoeveel bedraagt het temperatuurverschil tussen het warmste en het koudste moment van de wandeling?

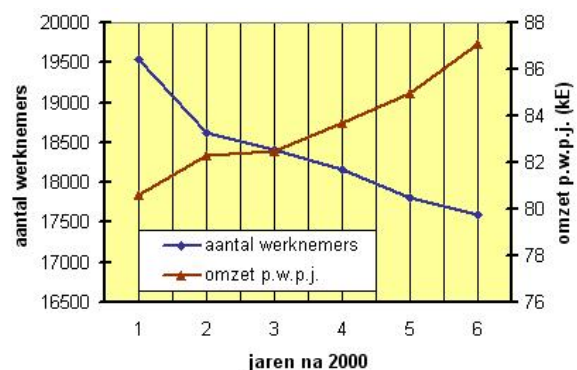
Voorbeeld 3

In de figuur zie je hoe binnen een groot bedrijf het aantal werknemers terugloopt, terwijl de omzet per werknemer per jaar stijgt (een mogelijke verklaring hiervoor is automatisering). Beide grafieken snijden elkaar. Leg uit waarom dit snijpunt geen enkele betekenis heeft en bereken de totale omzet van het bedrijf in dat jaar.

Antwoord

Er zijn twee verschillende verticale assen: op de linker- en rechter- assen lees je het aantal werknemers af, op de rechter- assen de omzet per werknemer per jaar (in duizenden euro).

In het punt waar beide grafieken elkaar lijken te snijden (in 2003 dus), is het aantal werknemers ongeveer 18350 en de omzet per werknemer per jaar (p.w.p.j.) ongeveer € 82500,00. Deze uitkomsten zijn totaal verschillend. Wel kun je zo gemakkelijk de totale jaaromzet van het bedrijf uitrekenen.



Figuur 5

Opgave 4

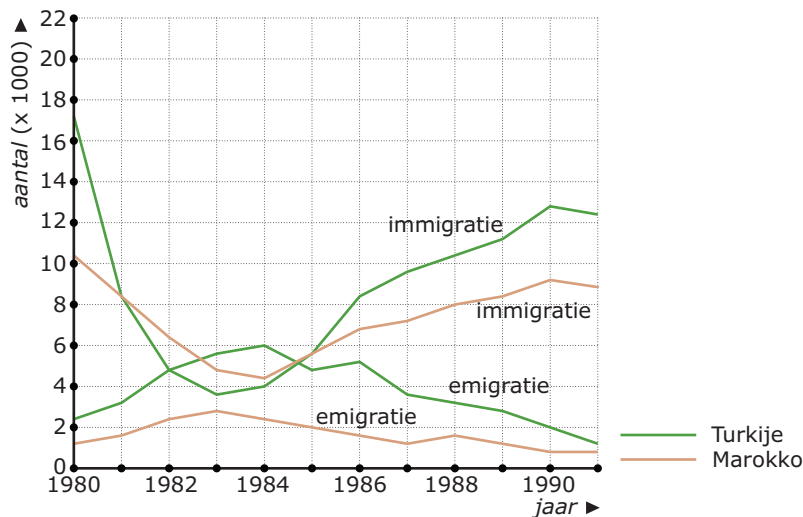
In **Voorbeeld 3** vind je twee grafieken die het aantal werknemers en de omzet van een bedrijf beschrijven.

- Waarom heeft het snijpunt van beide grafieken geen betekenis?
- Hoeveel bedraagt de totale jaaromzet in 2003?
- Hoeveel bedraagt de totale jaaromzet in 2006?
- Betekent de daling van het aantal werknemers ook een daling van de omzet? Hoe zit het waarschijnlijk met de winst?

Verwerken

Opgave 5

Onder het migratiesaldo wordt het verschil verstaan tussen het aantal mensen dat naar Nederland immigrereert en het aantal mensen dat uit Nederland emigreert. In de grafiek vind je gegevens over de migratie van Marokkanen en Turken van en naar Nederland in de periode 1980 - 1991.

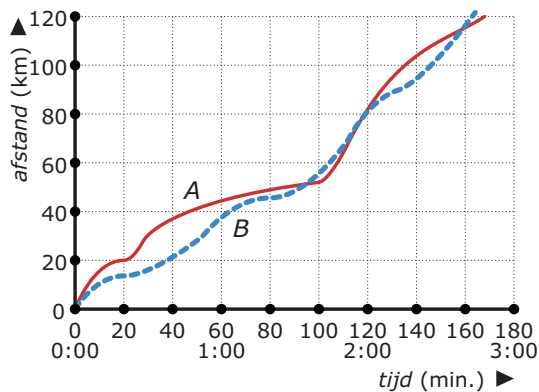


Figuur 6

- Welke betekenis hebben de snijpunten van de grafieken van 'immigratie' en 'emigratie' bij dezelfde bevolkingsgroep?
- Welke betekenis hebben de snijpunten van de twee immigratiegrafieken?
- Welke van deze beide bevolkingsgroepen kende in een deel van deze periode een negatief migratiesaldo?
- Kun je op grond daarvan zeggen dat deze bevolkingsgroep in Nederland in aantal achteruit ging?
- Opvallend is het feit dat in de jaren 1982 - 1984 de immigratie veel lager is dan in de andere jaren en de emigratie juist wat hoger is. Geef daar redenen voor.
- Teken de grafiek van het migratiesaldo van de Turken.
- In welk jaar daalt dit migratiesaldo het sterkst?

Opgave 6

Je ziet de grafieken van twee wielrenners die samen een dag zijn gaan fietsen.

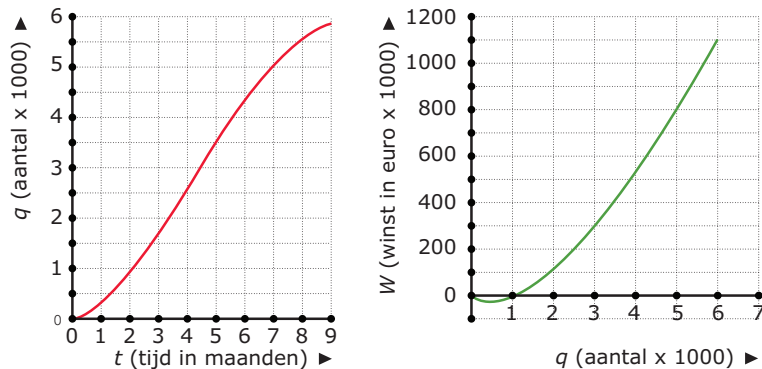


Figuur 7

- Welke betekenis hebben de snijpunten van beide grafieken?
- Gedurende welke periode rijdt renner A voor renner B?
- Op welke momenten fietsen beide renners even snel?

Opgave 7

Deze grafieken laten zien hoeveel exemplaren q (in duizendtallen) een bedrijf van een artikel heeft verkocht en hoeveel winst W (in duizenden euro) het daarbij heeft gemaakt. q is uitgezet tegen de tijd t (in maanden) na de introductie van dit artikel op de markt.



Figuur 8

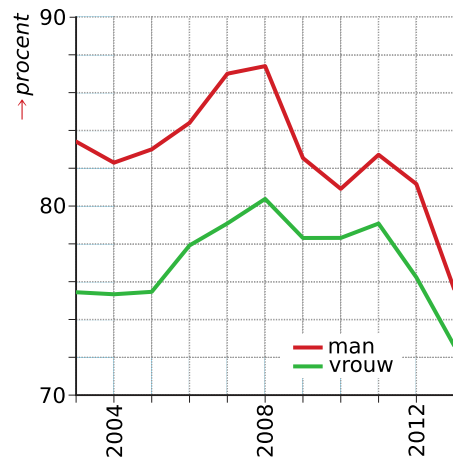
- Hoeveel exemplaren zijn er na vier maanden verkocht en hoeveel winst is daarop gemaakt?
- Tot welk aantal verkochte exemplaren werd er nog geen winst gemaakt?
- Maak een tabel van de winst W (in duizenden euro) afhankelijk van de tijd t (in maanden).

Opgave 8

Bekijk deze grafieken van het CBS.

- a Waarom is de arbeidsparticipatie van mannen en vrouwen samen niet gewoon de somgrafiek van de twee gegeven grafieken?
- b Hoe kun je de grafiek wel maken? Ga uit van een gelijke verdeling tussen mannen en vrouwen.
- c Maak een verschilgrafiek.
- d Wat is de betekenis van de verschilgrafiek?

ontwikkeling netto arbeidsparticipatie onder niet-onderwijsvolgende jongeren (15 tot 27 jaar) naar geslacht

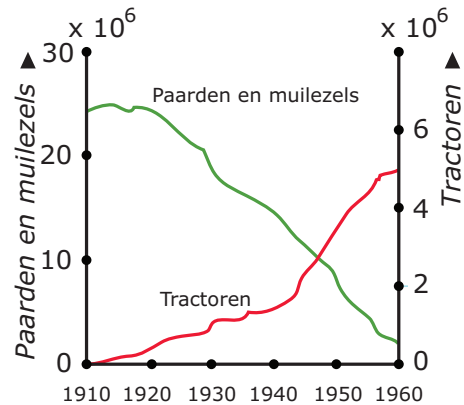


Figuur 9

Opgave 9

De figuur laat zien hoe in de vorige eeuw in de VS de paarden en muilezels als trekdieren werden vervangen door tractoren.

- a De grafieken hebben een snijpunt. Heeft dat enige betekenis? Licht je antwoord toe.
- b Op welk moment waren er even veel tractoren als paarden en muilezels?



Figuur 10

Toepassen

Om de groei van kinderen te volgen zijn er zogenaamde **schoolartsenkaarten** ontwikkeld. Je kunt ze hier downloaden:

- [schoolartsenkaart voor jongens](#)
- [schoolartsenkaart voor meisjes](#)

Je kunt er twee groeigrafieken op bijhouden: een grafiek voor *lengte* in cm en een grafiek voor *gewicht* in kg, beide afhankelijk van *leeftijd* in jaren.

Opgave 10

Bekijk de schoolartsenkaart voor meisjes. Door de twee P_{50} -grafieken te schakelen, kun je de grafiek maken van het gewicht afhankelijk van de leeftijd van een gemiddeld meisje van 3 tot 16 jaar. Leg uit hoe je dan te werk moet gaan en teken die grafiek.

Opgave 11

Bekijk de schoolartsenkaart voor jongens. Maak ook de grafiek van het gewicht afhankelijk van de leeftijd van een gemiddelde jongen van 3 tot 16 jaar. Vergelijk die grafiek met de grafiek van de meisjes en trek enkele conclusies.

Testen

Opgave 12

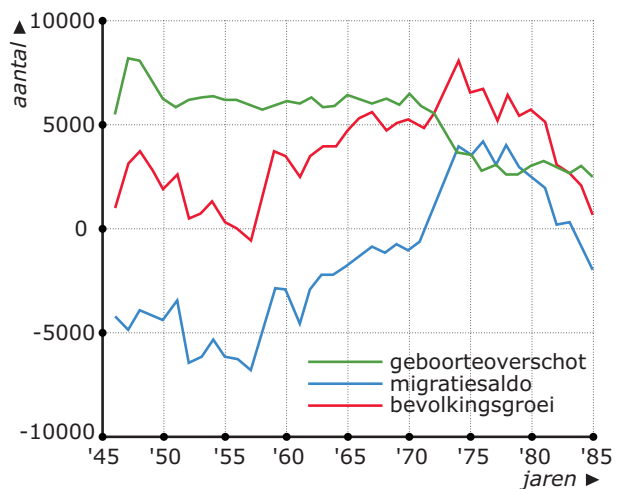
Klaas en Frits deden mee aan een halve triathlon: 3 km zwemmen, 75 km fietsen en 24 km hardlopen. De gemiddelde snelheden voor Klaas waren: zwemmen 3 km/h; fietsen 30 km/h; hardlopen 12 km/h. Voor Frits waren ze: zwemmen 4 km/h; fietsen 25 km/h; hardlopen 16 km/h.

- Teken beide grafieken in één assenstelsel.
- Wie van de twee was het eerst bij de finish? Hoeveel minuten was zijn voorsprong?
- Hebben de snijpunten van deze grafieken betekenis?
- Kun je de vraag wie na drie uur voor lag beantwoorden? Licht je antwoord toe.
- Bereken de gemiddelde snelheid van Klaas over de halve triathlon.

Opgave 13

In de figuur vind je grafieken van de bevolkingsgroei, het migratiesaldo en het geboorteoverschot in een bepaalde regio in de periode 1946-1985.

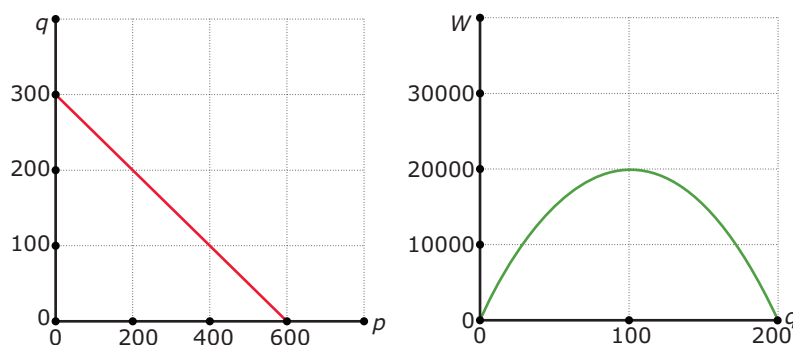
- Welk verband is er tussen deze drie grafieken?
- Er zijn twee jaren waarin het geboorteoverschot en de bevolkingsgroei gelijk zijn. Welke jaren zijn dat?
- Wat betekent dat voor het migratiesaldo?
- Er is een periode waarin het geboorteoverschot vrijwel constant is. Wat betekent dat voor de grafieken van het migratiesaldo en de bevolkingsgroei?



Figuur 11

Opgave 14

De winst W op een bepaald artikel hangt af van de prijs per stuk p en de hoeveelheid q die wordt verkocht. De grafieken geven het verband tussen W , p en q weer.



Figuur 12

Teken een grafiek van W uitgezet tegen p .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
