2.4 De driehoek van Pascal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- mogelijke routes zonder omwegen tellen in een rooster;
- de driehoek van Pascal gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- permutaties en combinaties toepassen bij het kiezen van r elementen uit n elementen.

Verkennen

Opgave V1

Figuur 1

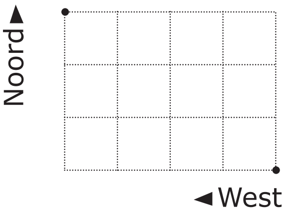
Bekijk het stratenplan van het centrum van Denver, een grote stad in de VS. Je staat op Larimer Square op de hoek van Larimer Street en 15th Street. Je wilt naar je hotel, het Hyatt Regency.

Uit hoeveel even lange routes (zonder omwegen) kun je kiezen?

Uitleg

Bekijk het stukje plattegrond van Denver. Je wilt van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar de Wynkoop Brewing Co, op de hoek van 18th Street en Wynkoop Street. Je vraagt je af hoeveel even lange routes je hiervoor kunt nemen, zonder omwegen.

Bekijk de figuur met een vereenvoudigde vorm van de plattegrond: vier blokken west en drie blokken noord. Je ziet ook hoe je ze kunt tellen. Het aantal routes in een punt is telkens het aantal routes in het punt eronder, opgeteld bij het aantal routes in het punt rechts ernaast.



Figuur 2

Je kunt het aantal routes ook sneller berekenen. Elke route is een rijtje van het type WNWWNWN waarin W een blok naar het westen en N een blok naar het noorden voorstelt. Je kiest daarbij drie posities uit de zeven mogelijke posities om een N neer te zetten (de rode verticale streepjes in de figuur). Als je de letters N geplaatst hebt, dan kun je nog maar op één manier de vier letters W plaatsen (de blauwe horizontale streepjes in de figuur).

Het totale aantal manieren is: $\binom{7}{3} = 35$. Je kunt dus vier keer west en drie keer noord kiezen uit zeven opties. Je kiest eerst de posities voor N. Dat zijn er drie.

Je kunt ook eerst de vier W's kiezen. Je kiest vier posities uit de zeven mogelijke om een W neer te zetten. Dit kan op $\binom{7}{4}$ manieren en dit is gelijk aan $\binom{7}{3}$, omdat het voor het aantal mogelijkheden niet uitmaakt of je eerst de letters N plaatst en dan de letters W of omgekeerd.

Reken na dat $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.

Opgave 1

In de zie je hoe je het aantal manieren kunt tellen om in Denver van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar de Wynkoop Brewing Co, op de hoek van 18th Street en Wynkoop Street, te komen. De kaart staat op dit **werkblad**.

a Je wilt van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar het Hyatt Regency (je hotel) lopen. Schets een daarbij passend rooster. Laat aan de hand van dit rooster met een berekening zien op hoeveel manieren je van Larimer Square naar het Hyatt Regency kunt komen.

b Bereken op hoeveel manieren je van Larimer Square (hoek Larimer Street en 15th Street) naar het kruispunt van Arapahoe Street en 20th Street kunt komen.

Opgave 2

Op hoeveel manieren kun je van Larimer Square (hoek Larimer Street en 15th Street) naar het kruispunt van Arapahoe Street en 20th Street lopen via het Hyatt Regency? Gebruik eventueel het **werkblad**.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk het rooster van 6 bij 3. Je vertrekt vanuit punt O richting punt P. Er zijn in elk roosterpunt twee keuzes: je gaat richting 'wel' of richting 'niet'. Je telt het aantal routes zonder omwegen van punt O naar punt P. Elke route (zonder omwegen) bestaat uit een route als NWNNWNWNN, drie keer 'wel' en zes keer 'niet'.

Het aantal routes naar een punt is telkens de som van het aantal routes naar het punt eronder en het aantal routes naar het punt links ervan. Je kunt dat in de figuur gemakkelijk natellen als je bedenkt dat je (bij het doorlopen van kortste routes) alleen naar rechts en omhoog kunt bewegen over de roosterlijnen. Dit telpatroon heet de **driehoek van Pascal** en kun je in een schema weergeven.

Je kunt het aantal routes NWNNWNWNN ook berekenen met **combinaties**. Je kiest drie uit de negen posities om een W neer te zetten. Daarbij speelt de volgorde binnen het groepje van 3 W's en 6 N's geen rol. Je vindt: $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$ routes.

Voorbeeld 1

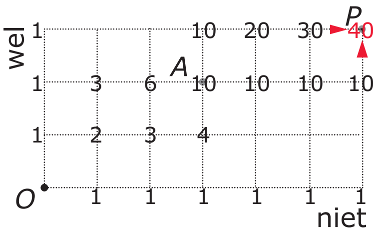
Hoeveel mogelijke routes (zonder omwegen) zijn er van O naar P? En hoeveel daarvan gaan langs punt A?

Antwoord

Je telt het aantal routes van O naar P met de driehoek van Pascal en je komt op 84 routes.

Je kunt ook rekenen met combinaties: het aantal routes is $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$

Ook de routes langs A kun je tellen met de driehoek van Pascal. Bedenk dan wel dat de roosterpunten rechts van A geen routes van onderaf erbij krijgen en dat de roosterpunten boven A geen routes van links erbij krijgen. Anders maak je omwegen.



Figuur 3

Ook nu gaat rekenen sneller met combinaties:

- het aantal routes van O naar A is $\binom{5}{3} = 10$
- en het aantal routes van A naar P is $\binom{4}{3} = 4$.
- Het aantal routes via A is $10 \cdot 4 = 40$.

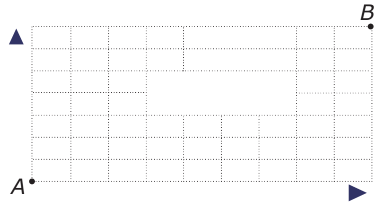
Opgave 3

Bekijk het rooster.

a Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B?

b Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P? En van P naar B?

c Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B via P?



Figuur 4

Opgave 4

Een systeem heeft zeven schakelaars die ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan.

a Teken een bijpassend rooster om mee te tellen.

b Laat in het rooster zien op hoeveel manieren je nul van de zeven schakelaars kunt aanzetten.

c Op hoeveel manieren kun je één van de zeven schakelaars aanzetten?

d Op hoeveel manieren kun je twee van de zeven schakelaars aanzetten?

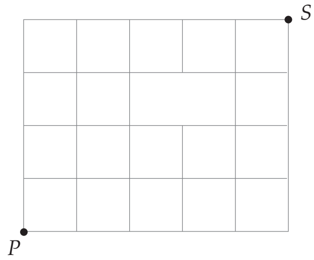
e Je hebt de eerste drie schakelaars aangezet. Op hoeveel manieren kun je er nu nog twee van de resterende vier aanzetten?

Voorbeeld 2

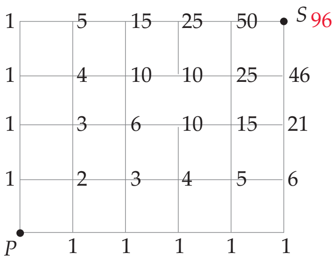
Hoeveel mogelijke routes (zonder omwegen) zijn er van P naar S?

Antwoord

Je ziet dat er tussen twee roosterpunten geen weg is. Dus het aantal combinaties van vijf uit negen levert nu niet het goede antwoord op. Je kunt nu alleen het aantal routes uittellen met behulp van het telsysteem van de driehoek van Pascal. Let goed op wat er in de roosterpunten bij de ontbrekende weg gebeurt. Het totaal aantal routes is 96.



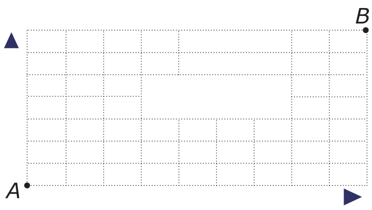
Figuur 5



Figuur 6

Opgave 5

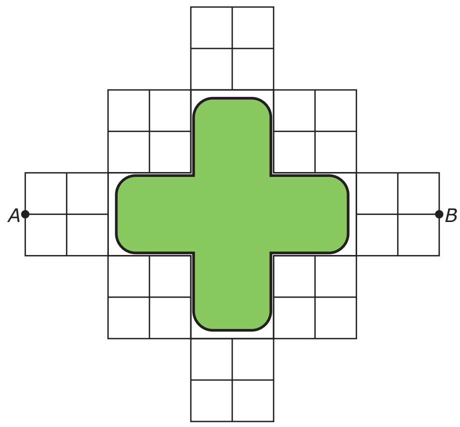
Op hoeveel manieren kun je in dit rooster van A naar B?



Figuur 7

Opgave 6

Je ziet een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. De route van A naar B moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden komen.
Hoeveel routes van A naar B zijn er mogelijk?



Figuur 8

Voorbeeld 3

Als je met vijf muntstukken werpt, zijn er nogal wat mogelijkheden. Er kan bijvoorbeeld vijf keer munt boven liggen, maar dat kan ook twee keer zijn en dat kunnen ook nog steeds andere muntstukken betreffen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

Antwoord

Je vindt alle 32 mogelijkheden door mogelijkheid voor mogelijkheid uit te werken.

- 5× M en 0× K: $\binom{5}{5} = 1$ mogelijkheid (MMMMM);
- 4× M en 1× K: $\binom{5}{4} = 5$ mogelijkheden (MMMMK, MMMKM, MMKMM, enzovoort);
- 3× M en 2× K: $\binom{5}{3} = 10$ mogelijkheden (MMMKK, MMKMK, MKMMK, enzovoort);
- 2× M en 3× K: $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden (MMKKK, MKKMK, KKMMK, enzovoort);
- 1× M en 4× K: $\binom{5}{1} = 5$ mogelijkheden (MKKKK, KKKMK, KKMMK, enzovoort);
- 0× M en 5× K: $\binom{5}{0} = 1$ mogelijkheid (KKKKK).

Een simpel wegendiagram is nu veel handiger. Elk geldstuk heeft namelijk twee mogelijkheden, ‘kop’ of ‘munt’. Bij vijf geldstukken zijn er in totaal $2^5 = 32$ mogelijkheden.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Teken een rooster om mee te tellen. Geef er in aan hoe je het aantal mogelijkheden kunt vinden met drie keer munt.

Opgave 8

Je gooit met zes dobbelstenen en let op het aantal keer zes.

a Op hoeveel manieren kun je precies vier keer een zes gooien?

b Op hoeveel manieren kun je meer dan drie keer een zes gooien?

c Je gooit dertig keer met een dobbelsteen. Op hoeveel manieren kun je tien keer een zes gooien?

Verwerken

Opgave 9

Een hockeyer neemt acht keer een strafbal en let op het aantal keren dat hij raak schiet.

a Op hoeveel manieren kan hij drie keer raak schieten?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

c Op hoeveel manieren kan hij minstens zes keer raak schieten?

d Op hoeveel manieren kan hij hoogstens zes keer raak schieten?

Opgave 10

Een schaakclub telt zeven leden. Als de leden bij elkaar komen, dagen ze elkaar uit voor een partijtje schaak.

a Teken een rooster om alle mogelijkheden te tellen voor iemand die twee willekeurige personen uitdaagt.

b Hoeveel mogelijkheden heeft een schaker om twee personen uit te dagen?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er totaal voor de schaker?

d De zeven leden kunnen maximaal drie partijen tegelijk spelen. Er is dan altijd een lid over. Op hoeveel manieren kan dat?

Opgave 11

Een hypotheekverstrekker moet voor volgende week achttien gesprekken inplannen. De klanten die hij moet inplannen kunnen iedere dag van de week. Hij besluit maandag vijf gesprekken te voeren.

a Op hoeveel manieren kan hij vijf van de achttien klanten kiezen?

b Dinsdag plant hij maar drie gesprekken, want hij werkt die dag ook aan zijn administratie. Op hoeveel manieren kan hij die drie klanten nog kiezen?

c Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de resterende drie werkdagen verdelen?

d Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de drie resterende werkdagen verdelen als hij iedere dag minstens drie klanten wil bezoeken?

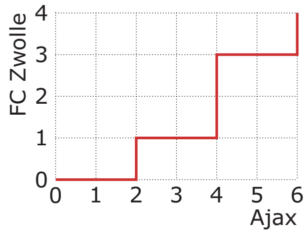
Opgave 12

Bij de voetbalwedstrijd Ajax - PEC Zwolle was de uitslag 6 - 4. Het scoreverloop is in de figuur weergegeven.

a Geef het scoreverloop door alle tussenstanden onder elkaar te zetten.

b Als je alleen de uitslag weet, hoeveel scoreverlopen zijn dan mogelijk?

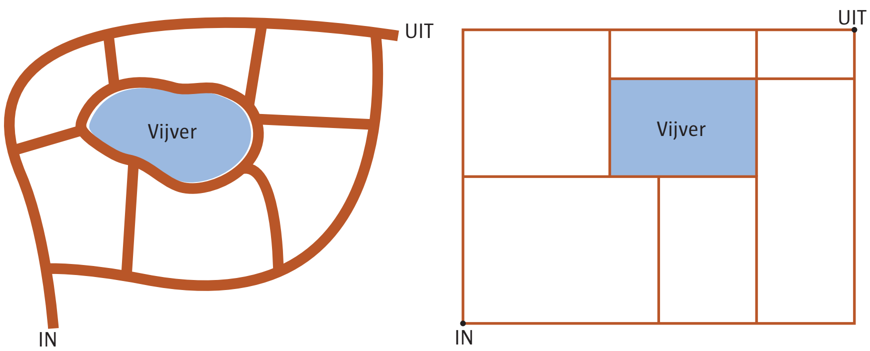
c Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd waarbij de tussenstand 4-1 was?



Figuur 9

Opgave 13

Je ziet een tuin met paden en een vijver. Deze plattegrond kun je schematisch weergeven in een rechthoekig rooster. Bereken met het rooster het aantal routes zonder omwegen dat je kunt lopen van de ingang naar de uitgang.



Figuur 10

Opgave 14

Een docent Engels maakt een meerkeuzetoets met zestien vragen. Op elk van de vragen is het antwoord A, B, C of D mogelijk.

a Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de docent besluit om acht keer antwoord B en acht keer antwoord D te kiezen?

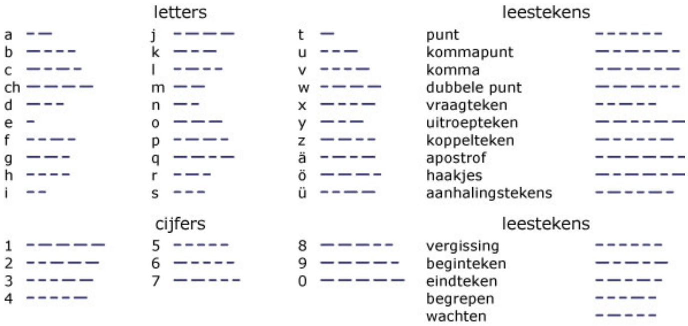
b Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de antwoorden A, B, C en D evenveel voorkomen?

c Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als er bij de eerste zeven vragen geen C voorkomt en bij de laatste negen vragen precies vier keer een A en drie keer een B voorkomt?

Toepassen

Opgave 15: Morsecode

Je ziet het morsealfabet. Elke letter bestaat uit maximaal vier signalen; elk cijfer bestaat uit precies vijf signalen. Een signaal kan kort zijn (aangegeven door -) of lang zijn (aangegeven door −).



Figuur 11

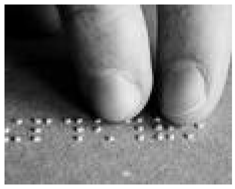
a Hoeveel tekens zijn er mogelijk met vijf signalen?

b Is het mogelijk om het alfabet weer te geven met maximaal vier signalen?

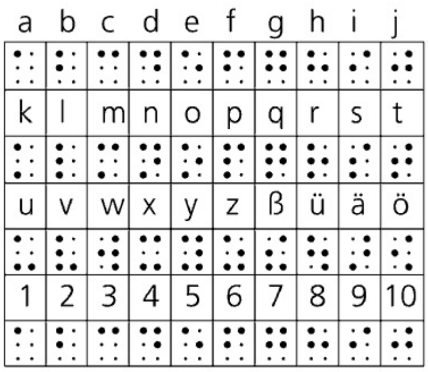
c Het is ook mogelijk om alle cijfers weer te geven met twee punten en drie strepen. Laat dat zien door alle mogelijkheden systematisch op te schrijven.

Opgave 16: Braille

Speciaal voor blinden en slechtzienden bestaat het Brailleschrift. In het Brailleschrift ontstaat elk teken door van 6 punten een aantal in reliëf weer te geven. De blinde kan het aantal en de positie van de punten voelen en zo het teken herkennen. Jet ziet het alfabet en de cijfers in Braille.



Figuur 12



Figuur 13

a Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 2 punten in reliëf?

b Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 3 punten in reliëf?

c Hoeveel Brailletekens zijn er totaal mogelijk?

d Er zijn Brailletekens die op de kop hetzelfde zijn. Hoeveel Brailletekens met 2 punten betreft dit?

Testen

Opgave 17

Een klas van 24 leerlingen wordt verdeeld in vier teams van zes personen. De klas besluit de verdeling uitsluitend van het toeval te laten afhangen. Op hoeveel manieren kunnen ze de vier teams samenstellen?

Opgave 18

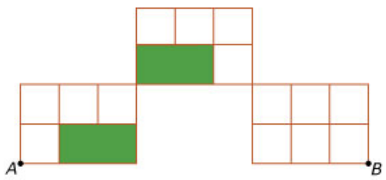
Je gaat codes maken van zeven letters met de letters A, B en C, bijvoorbeeld BAAACBC. Bereken de volgende aantallen.

a Het aantal codes met precies drie keer een A en twee keer een C.

b Het aantal codes met precies vier keer een A.

Opgave 19

Bepaal in het rooster het aantal kortste routes van A naar B.



Figuur 14

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 2.

Werkblad bij Opgave 2 op pagina 2.