2.3 Combinaties

Inleiding

In dit onderdeel bekijken we situaties waarin je een keuze maakt van een aantal elementen uit een groep. Je leert onderscheid te maken tussen situaties waarin de volgorde waarin de elementen gekozen worden wel uitmaakt (permutaties) en niet uitmaakt (combinaties).

Je leert in dit onderwerp

- het verschil onderscheiden tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling.

Verkennen

Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Hun volgorde van aankomst hangt uitsluitend van het toeval af.

a Op hoeveel manieren kunnen drie van de acht hardlopers als eerste, tweede en derde aankomen?

b De eerste drie lopers gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Uitleg

Bij de Olympische Spelen is de 100 meter hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten acht lopers: A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver en brons. Alle lopers zijn in staat elke medaille te behalen. Hoeveel top 3's zijn er mogelijk?

Omdat het hier zonder herhaling is en omdat de volgorde belangrijk is, gaat het om het aantal permutaties, in dit geval van 3 uit 8: $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ mogelijkheden.

Figuur 1

In de voorrondes is de volgorde niet belangrijk. De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De groepjes BZG, BGZ, ZBG, GBZ, ZGB en GZB zijn dus hetzelfde. Dit zijn geen afzonderlijke mogelijkheden (volgordes), maar samen vormen ze één mogelijkheid (groep).
Dat geldt net zo voor alle andere drietallen. De volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en de $3! = 6$ volgordes/permutaties vormen één groep.

Dit betekent dat er 336 gedeeld door 3!, dus 56 groepjes zijn. Dit heet het aantal combinaties van 3 uit 8.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg** met het aantal combinaties van 3 uit 8.

a Wat is het kenmerkende verschil tussen de finale en de voorrondes?

b Waarom zijn er in de voorrondes minder uitkomsten als je alle mogelijke eindresultaten wilt berekenen?

c Bereken het aantal groepjes zonder herhaling en waarbij de volgorde niet uitmaakt als je uit 9 personen er 4 kiest.

d Bereken het aantal groepjes zonder herhaling en waarbij de volgorde niet uitmaakt van 3 uit 100. Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarbij de volgorde wel van belang is, heb je $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ mogelijkheden.

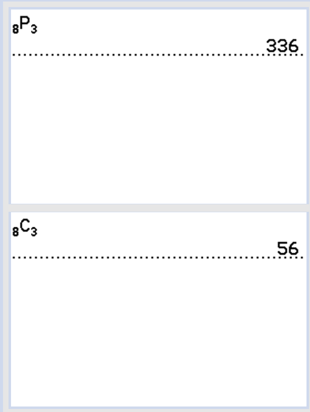
Dit is het aantal **permutaties** van drie elementen uit acht elementen.

Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarvan hun onderlinge volgorde niet van belang is, heb je $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ mogelijkheden.

Dit heet het aantal **combinaties** van drie elementen uit acht elementen.

Je noteert $\binom{8}{3}$ en je zegt: ‘acht boven drie’.

De rekenmachine heeft hier een speciale functie voor, zie het **Practicum**.



Figuur 2

Voorbeeld 1

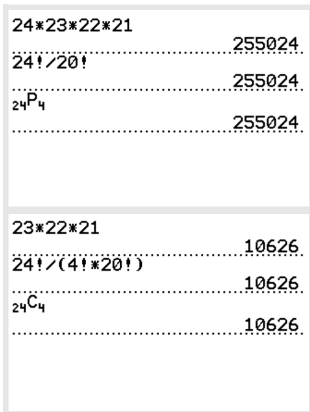
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen samengesteld. Deze vier personen krijgen ieder een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?
En op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

Antwoord

In het eerste geval is de volgorde in de groep van belang: word je als eerste ingeloot, heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, of derde of vierde wordt ingeloot.
Het gaat dus om het aantal permutaties van 4 uit 24. Dat zijn $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255024$ mogelijkheden.

In het tweede geval is de volgorde in de groep niet van belang. Ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat dus om het aantal combinaties van 4 uit 24. Dat zijn $\binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$ mogelijkheden.



Figuur 3

Opgave 2

Vergelijk de verschillen tussen de antwoorden op de twee vragen in **Voorbeeld 1**.
Je hebt een groep van twintig personen met acht mannen en twaalf vrouwen.

a Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen geselecteerd. Op hoeveel manieren kan dat als ze pas na de loting een bepaalde opdracht krijgen?

b Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen geselecteerd. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht. Op hoeveel manieren kan dat als er per opdracht wordt geloot?

Voorbeeld 2

Uit een groepje van vijf meisjes en vier jongens kies je door loting een groepje van drie.
Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een groepje van drie met minstens twee meisjes?

Antwoord

Minstens twee meisjes betekent dat er twee meisjes of drie meisjes in het groepje zitten. Als er precies twee meisjes in het groepje zijn, kun je eerst twee van de vijf meisjes kiezen en vervolgens één van de vier jongens. De twee meisjes kies je op $\binom{5}{2} = 10$ manieren. Naast deze tien mogelijkheden zijn er nog $\binom{4}{1} = 4$ mogelijke keuzes voor één jongen.

Dat betekent dat er totaal $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 10 \cdot 4 = 40$ mogelijkheden zijn om precies twee meisjes en één jongen te kiezen.

Met precies drie meisjes in het groepje, kies je drie van de vijf meisjes. Dat kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren.

Totaal zijn er $40 + 10 = 50$ manieren om drietallen met minstens twee meisjes te loten.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Op hoeveel manieren kun je door loting uit een groep van twintig, met acht mannen en twaalf vrouwen, een groep van vijf samenstellen die bestaat uit drie mannen en twee vrouwen?

b Op hoeveel manieren kun je door loting uit een groep van twintig, met acht mannen en twaalf vrouwen, een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens drie mannen?

Opgave 4

Er zijn dertig schakelaars waarmee je dertig toneellampen op een podium kunt regelen. Voor een bepaalde scène worden er vier van de dertig aangezet. De volgorde waarin ze worden aangezet, is van belang.

a Op hoeveel manieren kun je de eerste schakelaar kiezen?

b Op hoeveel manieren kun je vier schakelaars kiezen?

c Voor een bepaalde scène worden de schakelaars $S5$, $S7$, $S8$ en $S9$ gebruikt. Op hoeveel verschillende manieren kun je die schakelaars aanzetten?

d Gebruik de antwoorden op b en c om uit te rekenen op hoeveel manieren je vier schakelaars uit de dertig kunt kiezen als de volgorde niet belangrijk is.

e Op hoeveel manieren kun je zes schakelaars kiezen uit de dertig als de volgorde niet belangrijk is?

Opgave 5

Voor je literatuurlijst moet je uit veertig literaire boeken en vijftien thrillers tien boeken kiezen.

a Op hoeveel manieren kan dat als er verder geen eisen aan je lijst worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kan dat als je maximaal drie thrillers mag kiezen?

Voorbeeld 3

Je wilt binnen een groep van acht meisjes en tien jongens vijf verschillende klusjes door loting verdelen.
Op hoeveel manieren kan dat als dit twee meisjes en drie jongens moeten zijn?

Antwoord

De twee meisjes en drie jongens kun je op $\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 28 \times 120 = 3360$ manieren kiezen.

Binnen elk vijftal kun je op $5! = 120$ manieren de klussen verdelen. Het totaal aantal mogelijkheden is $5! \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 120 \cdot 3360 = 403200$.

Opgave 6

Je wilt binnen een groep van tien meisjes en acht jongens zes verschillende klusjes door loting verdelen.
Op hoeveel manieren kan dat als dit drie meisjes en drie jongens moeten zijn?

Verwerken

Opgave 7

Iemand moet 10 vragen met ‘ja’ of ‘nee’ beantwoorden.

a Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer ‘ja’?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies 9 keer ‘ja’?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

Opgave 8

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren ‘kop’.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke uitkomsten met precies twee keer ‘kop’ zijn er?

c Je gooit nu met 50 geldstukken. Op hoeveel manieren kun je 20 keer ‘kop’ werpen?

Opgave 9

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus iedere deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kun je berekenen met behulp van combinaties. Leg uit waarom je met combinaties rekent en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

Opgave 10

Een groep muizen bestaat uit acht mannetjes en twaalf vrouwtjes. Er wordt willekeurig een groepje van vijf muizen gekozen.

a Het groepje bestaat uit uitsluitend vrouwtjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

b Het groepje bestaat uit hoogstens twee mannetjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

Opgave 11

Op hoeveel manieren kun je acht verschillende boeken op een rij op een boekenplank plaatsen onder de volgende voorwaarden?

a Elke volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken aan het eind of aan het begin moeten naast elkaar staan.

d Er worden eerst drie boeken uitgekozen om hetzelfde te worden gekaft en worden dan aan het eind van de rij gezet.

Opgave 12

Je werpt met drie dobbelstenen.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er? Let op! Er is één manier om drie te gooien, maar er zijn meerdere manieren om vier te gooien.

b Je kunt op verschillende manieren twaalf ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal vier te gooien, maar ook door een zes en tweemaal drie te gooien.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om twaalf ogen te gooien?

c Op hoeveel manieren kun je hoogstens zestien ogen gooien?

Opgave 13

Op een scholengemeenschap bestaat de medezeggenschapsraad uit twaalf personen: zes personeelsleden, drie ouders en drie leerlingen. Deze medezeggenschapsraad kiest een dagelijks bestuur van drie personen.

a Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er verder geen eisen aan dat dagelijks bestuur worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er een personeelslid, een ouder en een leerling in moeten zitten?

c Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als eerst de voorzitter, vervolgens de vice-voorzitter en ten slotte de secretaris in functie worden gekozen?

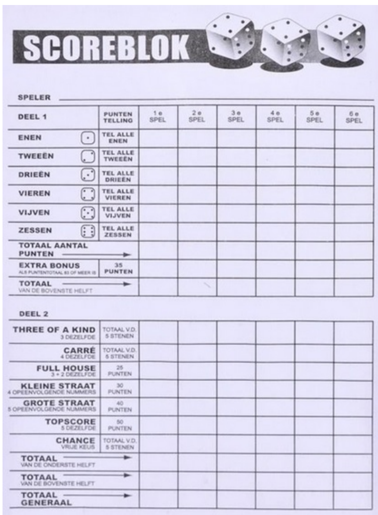
Toepassen

Opgave 14: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Full House. Bij deze worp gooi je een aantal ogen driemaal en een ander aantal ogen tweemaal; bijvoorbeeld driemaal 5 en tweemaal 1. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Full House te gooien?

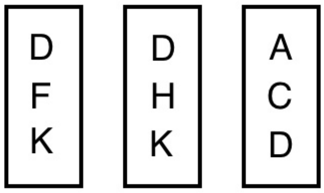


Figuur 4

Opgave 15: Straten vergelijken

Een planoloog wil weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Hij legt een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hun bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken.

Het onderzoek heeft betrekking op tien straten, straat A, B, C, D, E, F, G, H, K en L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Je ziet drie voorbeelden.



Figuur 5

a Hoeveel kaartjes zijn er nodig?

b Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?

c Op hoeveel kaartjes komen straat A en B samen voor?

Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze te maken.

d Onderzoek of het mogelijk is dat hij zeven keer voor de combinatie AB, zeven keer voor de combinatie AC en zeven keer voor de combinatie AD kiest.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

Een volleybalteam bestaat uit 12 spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en op welke van de zes posities in het veld.

a Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

b Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

Opgave 17

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

a Op hoeveel manieren kun je die leerlingen op een rij zetten?

b Op hoeveel manieren kun je vijf van de 26 leerlingen op een rij zetten?

c Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf uit 26 kiezen?

d Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen met precies twee meisjes?

Opgave 18

Je bestelt een ijsje bij ijssalon Venezia. Je kunt je ijsje krijgen in een oubliehoorn, wafelhoorn, wafelbeker of gewone beker. Je kunt een, twee of drie bolletjes ijs nemen met tien verschillende smaken. Daarbij kun je natuurlijk ook meerdere bolletjes van dezelfde smaak kiezen. Op je ijsje kun je slagroom nemen of niet. Bovenop je slagroom kun je vervolgens weer een discodip, een nootjesdip of geen dip nemen.

a Op hoeveel manieren kun je een ijsje samenstellen bij Venezia?

b Op hoeveel manieren kun je een ijsje samenstellen bij Venezia als je alleen ijsjes met één of meer verschillende smaken telt?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Tellen en de TI84**
- **Tellen en de TInspire**
- **Tellen en de Casio cfx-9850**
- **Tellen en de HPprime**
- **Tellen en de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.