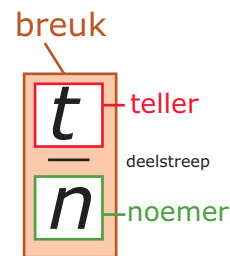


1.2 Breuken

Inleiding

Je hebt al leren werken met breuken: je kunt ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Toch is het nuttig om dit nog even te herhalen, zeker als daarin ook variabelen voorkomen. Je kunt dan later veel gemakkelijker werken met formules waarin breuken voorkomen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw rekenen met breuken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen.

Voorkennis

- rekenen met getallen (met de hand en met de rekenmachine) en met breuken;
- het begrip variabele en hoe je ermee kunt rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{8}$ en $\frac{3}{10}$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{5}{8} - \frac{3}{10}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{6}{p}$ en $\frac{4}{q}$. Neem aan dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{6}{p} - \frac{4}{q}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken $\frac{6}{p} \div \frac{4}{q}$.
- Waarom moet je aannemen dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je ervoor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is. Dit heet het kleinste gemeenschappelijke veelvoud of kortweg k.g.v. van beide noemers.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van 5 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van 6 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.
- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van b en d . Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van a en $2a$. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

Nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig; je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12)
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$)

Let op! De noemer van een breuk kan niet gelijk zijn aan 0.

Bij $x \cdot 0 = 5$ kun je geen waarde voor x invullen die de vermenigvuldiging kloppend maakt. Delen door 0 heeft geen betekenis.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen.

Neem de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{4}{b}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{5}{a} + \frac{4}{b}$, $\frac{5}{a} - \frac{4}{b}$ en $\frac{5}{a} \cdot \frac{4}{b}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{5}{3a}$ en $\frac{4}{5a}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{5}{3a} + \frac{4}{5a}$, $\frac{5}{3a} - \frac{4}{5a}$ en $\frac{5}{3a} \cdot \frac{4}{5a}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{6x}{2xy}$ en $\frac{5}{3y}$.

- Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.
- Tel beide breuken op.
- Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:

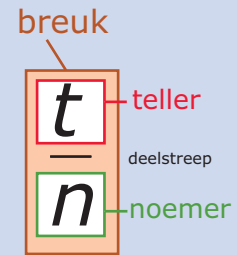
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} / \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{beide breuken met } b \cdot d \text{ vermenigvuldigen})$$

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook gelden $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** of kortweg k.g.v. van de noemers van de breuken.



Figuur 2

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4q+3p}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} / \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} / \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 4

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{5}{3a}$ en $\frac{4}{b}$ met $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken het product van beide breuken.
- Deel $\frac{5}{3a}$ door $\frac{4}{b}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{4}a$ en $\frac{1}{2a}$ met $a \neq 0$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken het product van beide breuken.
- Deel $\frac{3}{4}a$ door $\frac{1}{2a}$.

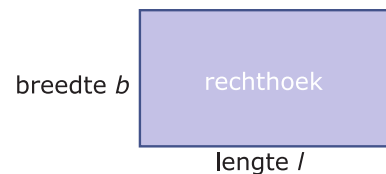
Opgave 5

Bekijk vooraf of je breuken kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$. Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk aan 0 zijn).

- a $\frac{2x}{4xy} + \frac{6}{3y}$
- b $\frac{-3b}{ab} / \frac{2a}{a^2}$
- c $\frac{2xy}{x} - \frac{15x}{3}$
- d $\frac{4xy}{2x} \cdot \frac{6x}{3}$

Voorbeeld 2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek $21,4 \text{ cm}$. Je wilt de lengte en de breedte bepalen.



Figuur 3

Antwoord

Dergelijke problemen met twee variabelen kun je oplossen met behulp van tabellen en grafieken. Je neemt voor de lengte bijvoorbeeld l en voor de breedte b . De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 21,4$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Deze formules kun je met behulp van de balansmethode herleiden tot de vorm $l = \dots$:

- Uit de formule voor de omtrek volgt $l = 10,7 - b$.
- Uit de formule voor de oppervlakte volgt $l = \frac{24}{b}$.

Je zegt wel dat l nu is uitgedrukt in b . Dat doe je om gemakkelijker tabellen en grafieken te kunnen maken. Probeer daarmee de juiste waarden voor lengte en breedte te vinden.

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- a Herleid zelf de twee formules.
- b Maak een tabel waarin beide formules staan. In deze tabel kun je opzoeken bij welke waarde van b er bij beide formules eenzelfde waarde voor l uitkomt. Welke waarden voor b en l vind je?

Opgave 7

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x . Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

- a $2x + 5y = 10$
- b $5x - 2xy = 10$
- c $2x \cdot 3y = 9$
- d $\frac{2x}{3y} = 9$

Verwerken

Opgave 8

Reken met de twee breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{x}{3y}$. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

- a Bereken de som van beide breuken.
- b Bereken het product van beide breuken.
- c Bereken $\frac{2x}{y} - \frac{x}{3y}$.
- d Bereken $\frac{2x}{y} / \frac{x}{3y}$.
- e Bereken de som van de breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{y}{3x}$.
- f Bereken het product van de breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{y}{3x}$.

Opgave 9

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk.

- a $\frac{1}{2x} + \frac{3}{y}$
- b $\frac{15xy}{3x} - \frac{12y^2}{4y}$
- c $\frac{y}{4x} \cdot \frac{2x^2}{3y}$

Opgave 10

Herleid eerst en bereken vervolgens als $a = 4$ en $b = -3$.

- a $\frac{6a}{ab} \cdot \frac{5b}{3a}$
- b $\frac{4}{3b} - \frac{1}{b}$
- c $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$
- d $\frac{2a}{ab} / \frac{6}{b}$

Opgave 11

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x .

- a $y \cdot 3x = 6$
- b $3y + x = 6$
- c $\frac{3y}{2x^2} = \frac{1}{x}$
- d $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 2$

Opgave 12

Van een rechthoek is de oppervlakte 30 cm^2 en de omtrek 23 cm .
Hoe lang zijn de zijden van deze rechthoek?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord met behulp van tabellen.

Toepassen

Opgave 13: Moeder en dochter

Hatice en haar moeder schelen 23 jaar in leeftijd. Als je hun leeftijden vermenigvuldigt, kom je op 624. Hoe oud is Hatice?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord.

Opgave 14: Karpers

In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Drie kwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er evenveel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers. Welk gedeelte van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjeskarpers?

Testen

Opgave 15

Herleid de uitdrukkingen eerst tot één breuk. Bereken dan voor $p = 3$ en $q = -6$.

a $\frac{2}{p} - \frac{3}{2q}$

b $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q}$

c $\frac{2}{p} / \frac{3}{2q}$

Opgave 16

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x en vereenvoudig de uitdrukking die je krijgt zoveel mogelijk. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$. Bereken vervolgens de waarde van y als $x = 5$.

a $\frac{3}{x} = \frac{y}{4} + 1$

b $\frac{3}{x} = xy + 1$

c $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$


Opgave 17

Een rechthoekig weiland met een oppervlakte van 6912 m^2 is 24 meter langer dan dat het breed is. Hoe breed is dit weiland? Gebruik formules om je antwoord te vinden.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het rekenen met breuken met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
