

1.1 Getallen en variabelen

Inleiding

Bij de inrichting van een schap in een supermarkt moet je vaak al rekenen. Want hoe plaats je bijvoorbeeld 200 pakjes drinken zo goed mogelijk op de daarvoor bedoelde schapruimte? De lengte en de breedte van het rechthoekige vlak waarop ze moeten staan zijn soms vaste getallen, soms variabele. En dan kun je nog stapelen... Wiskunde gaat over getallen en variabelen, in dit onderdeel worden kennis en vaardigheden uit de voorgaande leerjaren herhaald.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met het decimale stelsel voor getallen;
- opnieuw rekenen met variabelen, alleen de basisbewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

Voorkennis

- rekenen met getallen (met de hand en met de rekenmachine);
- het begrip variabele en hoe je ermee kunt rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je vakken vult bij een supermarkt. Je moet 200 pakjes drinken in een schap plaatsen. Elk pakje heeft de vorm van een balk van 4,8 bij 3,8 bij 12,0 cm. Van elk pakje moet de voorkant duidelijk zichtbaar zijn, die voorkant is een rechthoek van 4,8 bij 12,0 cm. De schapruimte is een rechthoek van 54 cm breedte en 30 cm diepte. De ruimte tussen twee schappen boven elkaar is 30 cm.

- Kun je alle 200 pakjes kwijt op dit schap?
- Door een beetje schuiven kun je de lengte van de schapruimte variëren. Hoe groot moet je die lengte maken om alle pakjes wel kwijt te kunnen?

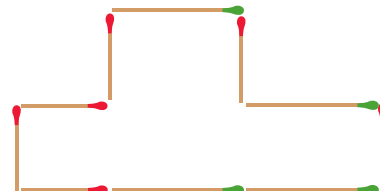


Figuur 2

Opgave V2

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers met een lengte van a cm en korte lucifers met een lengte van b cm.

- Kies $a = 4,5$ cm en $b = 3$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.
- Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.
- Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.



Figuur 3

Uitleg

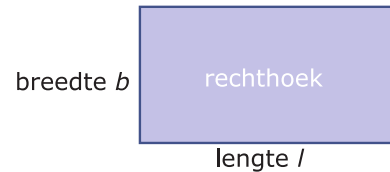
Bij het rekenen gebruik je getallen. Dat zijn decimale getallen, wat betekent dat het tientallige (decimale) stelsel wordt gebruikt. Bekijk bijvoorbeeld het getal 16302,54. Het getal bestaat uit:

- 1 tienduizendtal is $1 \cdot 10000$
- 6 duizendtallen is $6 \cdot 1000$
- 3 honderdtallen is $3 \cdot 100$

- 0 tientallen is $0 \cdot 10$
- 2 eenheden is $2 \cdot 1$
- decimale komma
- 5 tienden is $5 \cdot 0,1$
- 4 honderdsten is $4 \cdot 0,01$

Op de rekenmachine gebruik je meestal de decimale punt in plaats van de decimale komma.

Soms zijn getallen nog onbekend. Als van een rechthoek lengte en breedte onbekend zijn, kun je er nog verschillende getallen voor kiezen. Je zegt dan dat de lengte en de breedte variabeel of veranderlijk zijn. Deze variabelen stel je voor door letters. Meestal zijn dit kleine letters die cursief worden gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b . Voor deze rechthoek geldt dan:



Figuur 4

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Er is gebruikgemaakt van de afspraak dat je het maalteken \cdot weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.

Bij het rekenen met variabelen gebruik je dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De gelijksoortige termen $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken. Maar $2a + 5b$ kun je niet korter schrijven, de termen zijn ongelijksoortig.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. Dit is de wisseleigenschap voor optellen en vermenigvuldigen.
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat het herschrijven of herleiden van een uitdrukking.

Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Een pakje sinaasappelsap heeft de vorm van een balk met een lengte van 4,8 cm, een breedte van 3,8 cm en een hoogte van 12,0 cm.

- Hoeveel cm^3 bedraagt de inhoud van zo'n pakje?
- Bereken de totale buitenoppervlakte van het pakje.
- Welke formule kun je nu maken voor de inhoud V van zo'n pakje?
- Welke formule kun je maken voor de totale buitenoppervlakte A van zo'n pakje?

Opgave 2

Hier tref je enkele uitdrukkingen met variabelen aan. Herleid ze tot een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking (dus een uitdrukking met zo min mogelijk tekens).

- $5 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a - b$
- $4a \cdot a - 3a + 5a - a^2$
- $5p - 8pq - 6p + 2p \cdot 4q$
- $8x^2 - 5x^2 + 2x \cdot x$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Je gebruikt **decimale getallen**, je werkt in het tientalig stelsel. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan, laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg. Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$, enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$, enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$, enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je daarom niet korter schrijven.

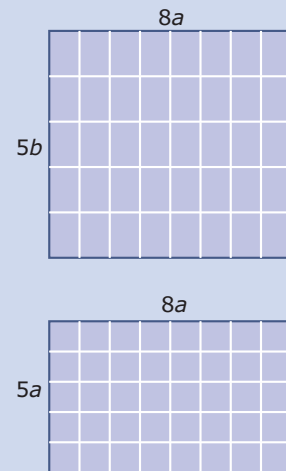
Bekijk de figuren.

$$8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab \text{ en } 8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2.$$

Bij het optellen en vermenigvuldigen van termen maak je gebruik van de

wisseleigenschap: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en $0x$ als 0 . Een losse nul laat je bij het optellen en het aftrekken weg.

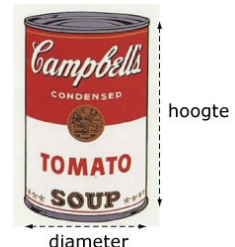


Figuur 5

Voorbeeld 1

Een blik heeft de vorm van een cilinder. De hoogte is 12,0 cm en de diameter is 8,4 cm. De inhoud van zo'n blik bereken je door de oppervlakte van de cirkelvormige bodem met de hoogte te vermenigvuldigen. De oppervlakte van een cirkel is πr^2 . Hierbij is r de straal van de cirkel.

Bereken de inhoud van dit blik in cm^3 nauwkeurig. Schrijf een formule op voor de inhoud V van een cilindrisch blik met een hoogte h en een diameter d .



Figuur 6

Antwoord

De inhoud van dit blik is $\pi \cdot 4,2^2 \cdot 12,0 \approx 665 \text{ cm}^3$.

Omdat de straal van elk cilindrisch blik $\frac{1}{2}d$ is, wordt de inhoud: $V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot h = \frac{1}{4}\pi d^2 h$. De haakjes zijn nodig om aan te geven dat je eerst $\frac{1}{2}d$ moet nemen en de uitkomst daarvan moet kwadrateren. Dit heeft met het invullen van een variabele in een formule en met rekenvolgorde te maken.

Opgave 3

Je hebt 300 blikken (gebruik de afmetingen uit **Voorbeeld 1**). Ze moeten allemaal naast en achter elkaar op een schap in de winkel worden geplaatst. De verticale tussenruimte tussen twee schappen is 42 cm en elk schap is 48 cm breed (dat is van voor naar achter gemeten).

- Kun je alle blikken kwijt als je een schaplengte van 1 meter mag gebruiken?
- Hoeveel schaplengte heb je nodig om alle blikken te kunnen plaatsen?
- Schrijf een formule op voor het totale volume aan schapruimte die deze blikken innemen.

Opgave 4

Bekijk het cilindervormige blik uit **Voorbeeld 1**.

- Bereken de inhoud van een cilindervormig blik met een hoogte van 10,0 cm en een diameter van 6,54 cm in cm^3 nauwkeurig.
- Leg uit waarom die oppervlakte $2\pi rh$ is.
- Bereken de oppervlakte aan metaal voor een cilindervormig blik met een hoogte van 10,0 cm en een diameter van 6,54 cm in cm^2 nauwkeurig.
- Schrijf een formule op voor de totale buitenoppervlakte A van een cilindrisch blik met hoogte h en diameter d .

Voorbeeld 2

Herleid de uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm (dus met zo min mogelijk tekens).

- $9a - 7a$
- $5a - 6b - a + 5b$
- $9a \cdot -7a$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy$

Antwoord

- $9a - 7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a - a - 6b + 5b = 4a - b$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$

Opgave 5

Herleid de uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm.

- $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$
- $-5xy - 3x \cdot -2y$
- $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$

Opgave 6

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het practicum vind je twee oefenvensters. In het linker venster oefen je het samennemen van gelijksoortige termen, in het rechter venster oefen je het vermenigvuldigen van variabelen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

Voorbeeld 3

Een pakje drinken heeft de vorm van een balk van 4,8 bij 3,8 bij 12,0 cm. De pakjes worden verpakt in kartonnen dozen. Daarin kunnen twee lagen van deze pakjes op elkaar, dus die dozen hebben een hoogte van 24 cm. De fabrikant wil dat er 96 van deze pakjes in een doos passen. De afmetingen van de doos bepalen de prijs: hoe groter de oppervlakte aan karton, hoe duurder het karton. Welke afmetingen krijgt een zo goedkoop mogelijke doos voor deze pakjes drinken?

Antwoord

Er moeten 48 pakjes per laag in de doos passen. Maar dat kun je op verschillende manieren bereiken; de aantallen pakjes naast elkaar en achter elkaar zijn variabel.

Neem a pakjes naast elkaar, totale lengte $4,8a$. Neem b pakjes achter elkaar, totale breedte $3,8b$. Dit levert de volgende twee formules op:

- $a \cdot b = 48$
- $2 \cdot 4,8a \cdot 3,8b + 2 \cdot 4,8a \cdot 24 + 2 \cdot 3,8b \cdot 24$ is de totale oppervlakte aan karton.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- Licht toe hoe je beide formules kunt afleiden.
- Schrijf de tweede formule uit het voorbeeld zo eenvoudig mogelijk.
- Maak nu een tabel met alle mogelijke gehele getallen voor a en b en bepaal bij welke combinatie de kosten van een doos het laagst zijn.

Opgave 8

Jannes en zijn moeder zijn samen 59 jaar. Jannes is geboren toen zijn moeder 23 jaar oud was. Bereken hoe oud Jannes is door twee formules te maken.

Verwerken

Opgave 9

Het Empire State Building is 381 meter hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Het gebouw heeft 103 verdiepingen die samen 373 meter hoog zijn. Daarbovenop staat nog een torentje. Op de punt van dat torentje staat een antenne die 61 meter hoog is. De entree op de begane grond beslaat vier verdiepingen, de lobby is drie verdiepingen hoog. Op de 87e verdieping is het 'Observatory' dat elke dag open is en waar jaarlijks 3,5 miljoen bezoekers komen. Je kunt er vanaf de begane grond (telt als eerste verdieping, als 'first floor') in net iets minder dan een minuut met één van de 73 liften komen.

- Hoe hoog is de lobby?
- Je kunt met trappen naar boven tot de 103e verdieping. Een traptrede is 20 cm hoog. Hoeveel traptreden zijn er tot het 'Observatory'?
- Met hoeveel meter per minuut gaat de lift naar het 'Observatory'?
- Hoeveel bezoekers heeft het 'Observatory' gemiddeld per dag?



Figuur 7

Opgave 10

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een kartonnen balk met een vierkant grondvlak.

- Hoeveel cm^3 hagelslag kan daar maximaal in als het grondvlak 5,6 bij 5,6 cm en de hoogte 9,2 cm is? Geef je antwoord in gehele cm^3 .
- Bereken de totale buitenoppervlakte van zo'n doosje.
- Met welke formule kun je dan de inhoud V berekenen?
- Geef ook een formule voor de totale oppervlakte A van zo'n doosje.

Opgave 11

Herleid.

- $6a + 9a$
- $6a \cdot 9a$
- $6a \cdot 9b$
- $6p - p$

Opgave 12

Veel vervoer vindt plaats per container. Als je veel te vervoeren of op te bergen hebt, kun je containers huren. Er bestaan verschillende typen en afmetingen. Dit zijn de specificaties van een 20ft-zeecontainer:

inhoud: $33,2 \text{ m}^3$

afmetingen ($l \cdot b \cdot h$ in cm) inwendig: $589 \cdot 234 \cdot 239$

deuropening ($b \cdot h$ in cm): $233 \cdot 228$

- Ga na of de opgegeven inhoud van de zeecontainer ongeveer klopt.
- Hoeveel dozen kunnen er naast elkaar als je ze met de smalle kant naar voren zet?
- Hoeveel dozen kunnen er in totaal in de container?

Je wilt op deze manier (dus met de smalle kant naar voren) 486 van die dozen in een container. De vloeroppervlakte die je daarmee bedekt moet zo klein mogelijk zijn.

- Hoe ga je die dozen stapelen?

Opgave 13

Bereken voor $a = 10$, $b = 6$ en $c = -3$. Herleid eerst de uitdrukking.

- $5a \cdot -2b + 6b \cdot a$
- $6a \cdot -5b \cdot c$
- $5b \cdot 3c \cdot a - 3a \cdot 2b \cdot c$

Toepassen

Opgave 14: Hardloophwedstrijd

Dion en Jaap hebben meegedaan aan een hardloophwedstrijd. Het aantal hardlopers dat eerder dan Dion bij de finish kwam, is gelijk aan het aantal hardlopers dat na hem eindigde. Het aantal hardlopers dat eerder dan Jaap bij de finish kwam, is driemaal zo groot als het aantal hardlopers dat na hem eindigde. In de eindranglijst staan tussen Dion en Jaap nog tien andere deelnemers. Er zijn geen hardlopers tegelijk over de finish gekomen en iedereen is gefinisht. Hoeveel hardlopers deden er mee aan deze wedstrijd?

Testen

Opgave 15

Je wilt de muren van je kamer wit verven met muurverf. Die kamer is netjes rechthoekig en 3,50 meter breed en 4,2 meter lang. De hoogte van de kamer is overal 2,80 meter. Verder zit er in je kamer een deur van 1 meter breed en 2,15 meter hoog en een raam van 1,80 meter breed en 0,95 meter hoog. Muurverf koop je in potten waarmee je 24 m^2 kunt schilderen. Je moet wel twee keer schilderen om alles netjes dekkend te krijgen. Zo'n pot muurverf kost € 16,80.

Hoeveel kost het je aan muurverf?

Opgave 16


Bereken voor $p = 5$, $q = -6$ en $r = 4$. Herleid eerst de uitdrukking.

- $2p - q + 5p - q$
- $2p \cdot -q \cdot 3r$
- $2p \cdot 5q + 3r \cdot 5r$
- $15p \cdot 3pr - 4p^2 \cdot -5r$

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het samennemen van uitdrukkingen met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
