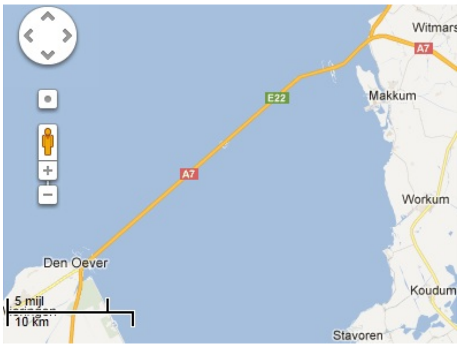
2.5 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je rijdt in een auto over een rechte snelweg van 30 km lengte. Je reistijd is afhankelijk van de (constante) snelheid waarmee de auto rijdt. Je kunt die snelheid berekenen, door je reistijd te meten. Daarbij past een vergelijking waarin een breuk voorkomt...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen waarin breuken voor komen.

Voorkennis

- rekenen met breuken, ook als daar variabelen in voor komen;
- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door de balansmethode te gebruiken en/of ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t.

b Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?

c Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

d Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?

e Probeer deze vergelijking op te lossen.

Uitleg

Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

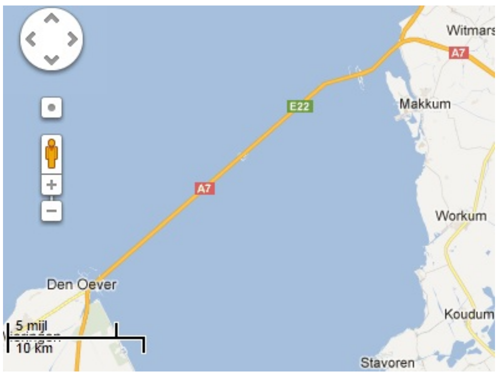
$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5$.

Deze formule hoort bij een hyperbolisch verband.

Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$\frac{1920}{v} + 5 = 25$

oplossen.



Figuur 2

Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je overhoudt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.
Dit noem je wel 'analogierekenen'.

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{dus} \quad 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 3

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dan val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een vrijwel constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.
Dit noem je wel **analogierekenen**.

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{dus} \quad 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 4

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.
De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijkteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de balansmethode. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{aligned} \frac{1920}{v} + 5 &= 25 && \text{beide zijden } -5 \\ \frac{1920}{v} &= 20 && \text{beide zijden } \cdot v \\ 1920 &= 20v && \text{beide zijden } /20 \\ v &= \frac{1920}{20} = 96 \end{aligned}$$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** een gebroken vergelijking wordt opgelost met de balansmethode.

a Bij welke stap moet je rekening houden met het feit dat beide zijden van een vergelijking met 0 vermenigvuldigen niet mag?

b Waarom mag je beide zijden van een vergelijking niet met 0 vermenigvuldigen?

c Stel je nu voor dat je een afstand van 150 km aflegt met een constante snelheid en een tussentijdse pauze van 12 minuten. Je doet er 1:40 uur over. Hoe snel rijd je?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

a $12 - \frac{1}{x} = 8$

b $\frac{50}{2x-3} = 10$

Opgave 5

Ook de volgende vergelijking kun je met de balansmethode oplossen. Je begint door beide zijden van de vergelijking met x te vermenigvuldigen.

a $\frac{6}{x} + x = 5$

Bij de vergelijking hieronder ga je op een vergelijkbare wijze te werk.

b $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $\frac{6}{x} = x - 5$ algebraïsch op.

Antwoord

Als $x \neq 0$ kun je beide zijden van deze vergelijking met x vermenigvuldigen. Je krijgt dan:

$6 = x^2 - 5x$

Deze vergelijking kun je verder oplossen door op 0 te herleiden en ontbinden in factoren toe te passen. Ga na dat je dan $x = -1 \vee x = 6$ als oplossing vindt.

Opgave 6

Bekijk hoe de vergelijking in **Voorbeeld 2** wordt opgelost.

a Leg uit, waarom $x = 0$ hier niet kan.

b Laat zien hoe de vergelijking verder kan worden opgelost.

c Ga na dat beide gevonden waarden de vergelijking kloppend maken.

Opgave 7

Los de vergelijking $\frac{5}{x} = x - \frac{3}{2x}$ algebraïsch op.

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a Analogierekenen: $\frac{200}{a} + 0{,}3 = 0{,}7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{45}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

b $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 10

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a.

a Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?

b Los deze vergelijking op.

c Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 11

Willem en zijn vriendin Arina leggen een afstand van 18 km af en komen gelijktijdig aan. Willem ging op de fiets en kreeg een voorsprong van 30 minuten op Arina die op haar scooter twee keer zo snel reed als Willem. Ga er van uit dat beiden een constante snelheid aanhielden.

Hoe snel reed Willem? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 12

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $V = I \cdot R$. Hierin is V het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

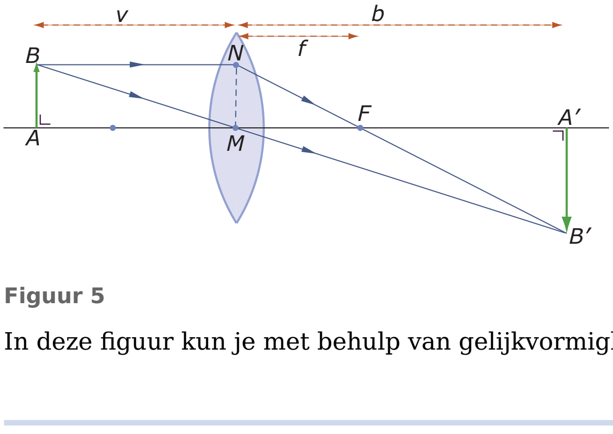
a Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2$ mA en $R = 1{,}5$ MΩ.

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

b Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. De standaardlens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 5

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldsafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntsafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13: De lenzenformule

a Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?

b Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?

c Los nu de vergelijking bij a op.

d Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldsafstand.

e Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = ...$ Laat zien hoe je dat kunt doen.

Testen

Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{40}{v} + 5 = 80$

b $\frac{15}{x} + \frac{30}{4x} = 45$

c $\frac{10}{5+x} = 4$

Opgave 15

Van een rechthoekig stuk land is de oppervlakte 1200 m^2.

De omtrek van dit stuk grond is 146 m.

a Noem de kortste zijde van dit stuk land x.

Laat zien dat dan geldt: $x + \frac{1200}{x} = 73$.

b Bereken de lengte van de zijden van het oorspronkelijke stuk land.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.