2.3 De balansmethode

Inleiding

Je kent het werken met de 'balansmethode' al uit voorgaande jaren. Dit blijft een belangrijke methode om vergelijkingen op te lossen, dus je gaat er opnieuw mee werken.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door de balansmethode te gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door terugrekenen als dat kan.

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

a Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?

b Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

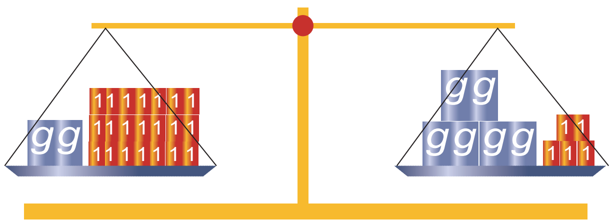
Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g. Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Uitleg

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g. Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die evenwicht is.



Figuur 2

Kun je dan uitrekenen hoeveel een blikje weegt? Bekijk hieronder hoe je dit probleem met een balans kunt oplossen.

$$\begin{aligned} 2g+21 &= 6g+5 && \text{beide zijden } -5 \\ 2g+16 &= 6g && \text{beide zijden } -2g \\ 16 &= 4g && \text{beide zijden } /4 \\ g &= 16/4 = 4 \end{aligned}$$

Het blikje weegt 4 gram.

Je hebt nu de 'balansmethode' toegepast. De vergelijking wordt algebraïsch opgelost, namelijk door een berekening met variabelen en getallen. De terugrekenmethode is een andere manier van algebraïsch oplossen. Er bestaan nog meer manieren...

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een balans in evenwicht.

a Op welke schaal liggen jouw blikjes en gewichten?

b Bekijk de uitwerking. Wat betekent de eerste stap voor de weegschaal?

c Bekijk de uitwerking. Wat betekent de tweede stap voor de weegschaal?

d Waarom wordt in de laatste stap 16 door 4 gedeeld en niet 4 door 16?

Opgave 2

Nu heeft je vriend 6 blikjes en 2 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf heb je één blikje en 12 losse gewichtjes van 1 gram.

Breng het oplossen in beeld.

Opgave 3

De balansmethode kun je ook toepassen als het niet over gewichten en een echte balans gaat. Je kunt altijd links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optellen en afrekken en met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen of door hetzelfde (behalve 0) delen.

Los de volgende vergelijkingen op.

a $5g + 6 = 3g + 9$

b $5g + 6 = 8g - 18$

c $-2{,}5g + 14 = 8g - 19$

d $-2{,}5g - 19 = 8g - 14$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele op meerdere plaatsen voorkomt op te lossen maak je vaak gebruik van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijkteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijkteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

Figuur 3

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe. Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: "Links en rechts worteltrekken." Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: "Links en rechts kwadrateren."
Dat zijn echter situaties die verder gaan dan de balansmethode. Dit kan niet altijd zomaar...

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = \text{-}5x + 1{,}5$ algebraïsch op.
Merk op dat je de variabele nu niet g maar x is. Het gaat natuurlijk niet altijd over gewicht.

Antwoord

Je gebruikt de balansmethode:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3} &= \text{-}5x + 1{,}5 && \text{beide zijden } \times 6\\
x + 2 &= \text{-}30x + 9 && \text{beide zijden } -2\\
x &= \text{-}30x + 7 && \text{beide zijden } +30x\\
31x &= 7 && \text{beide zijden } /31\\
x &= 7/31 = \tfrac{7}{31}
\end{aligned}
$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x = \frac{7}{31}$.
Laat een breuk in het antwoord staan en rond niet af. Je hebt dan de vergelijking **exact** opgelost. Afronden doe je alleen als daar om gevraagd wordt!

Opgave 4

Bekijk in Voorbeeld 1 de oplossing van de gegeven vergelijking.

a Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?

b Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?

c Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?

d Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $7x - 15 = 4x - 3$

b $0{,}7 - 0{,}2x = 1 - 0{,}6x$

c $\frac{1}{5}x + 2 = 0{,}3x - 3$

d $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $\text{-}2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b$.

Antwoord

Ook hier doe je de balansmethode, maar nu werk je eerst de haakjes uit.

$$
\begin{aligned}
\text{-}2(b + 3) &= 5(b + 7) + 2b && \text{beide zijden haakjes uitwerken en verder herleiden}\\
\text{-}2b - 6 &= 7b + 35 && \text{beide zijden } +6\\
\text{-}2b &= 7b + 41 && \text{beide zijden } -7b\\
\text{-}9b &= 41 && \text{beide zijden } /\text{-}9\\
b &= 41/\text{-}9 = \text{-}\tfrac{41}{9}
\end{aligned}
$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de gegeven vergelijking.

a Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Controleer je antwoord door substitutie.

c Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x+2) = 2x + 15$

b $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$

c $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x+5)$

d $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2-p)$

e $x - \frac{1}{4}(x+3) + \frac{3}{4} = 0$

Opgave 8

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijkteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

a $2(x+4) = x - (4-x)$

b $2(x-2) = x - (4-x)$

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $0{,}5(x-3)^2 - 10 = 50$.

Antwoord

Deze vergelijking kun je snel oplossen door terugrekenen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen:

$$\begin{aligned} 0{,}5(x-3)^2 - 10 &= 50 & &\text{beide zijden } +10 \\ 0{,}5(x-3)^2 &= 60 & &\text{beide zijden } /0{,}5 \\ (x-3)^2 &= 120 & &\text{terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)} \\ x-3 &= \pm\sqrt{120} & &\text{beide zijden } +3 \\ x &= 3 \pm \sqrt{120} \end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x = 3 + \sqrt{120}$ en/of $x = 3 - \sqrt{120}$.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de gegeven vergelijking.

a Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.

c Bij de stap 'terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)' is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x+10)^2+50=70$

b $10-x^2=3x^2$

c $10-(x-1)^2=5$

Verwerken

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

a $3x-7=\text{-}x+10$

b $5x-4=3(5-x)$

c $0{,}2x+10=310$

d $4\left(5-\frac{3}{4}x\right)+5x=\text{-}x+10$

e $5x-(3-2x)=11$

f $\frac{5-x}{3}=\text{-}\frac{1}{2}(x+6)$

g $6-2(x-5)^2=2$

h $(x-5)^2=5+x^2$

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

a $1-(x-3)=2(3x-7)$

b $2x-4=2(1+x)$

c $\frac{3x-5}{2}=0{,}25(2x-10)+x$

d $6+2(x-2)^2=4$

e $6-2(x-2)^2=4$

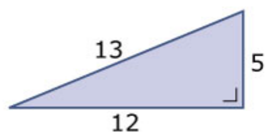
Opgave 13

Oefen het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.



Figuur 4

a Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hiernaast is getekend.

De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.

b Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x+1$ noemen? Welke van beide is de hypotenusa van de driehoek?

c Aan welke vergelijking moet x voldoen?

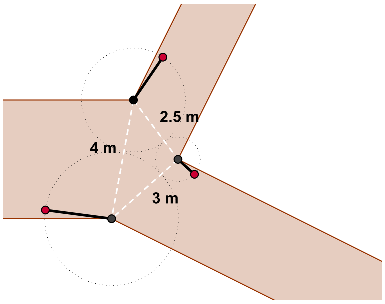
d Laat zien dat deze vergelijking alleen $x=12$ als oplossing heeft.

Toepassen

Bekijk de applet: hekkenprobleem

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m.

Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid.
Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...



Figuur 5

Opgave 15: Hekkenprobleem

Bekijk het hekkenprobleem in **Toepassen**.
Gebruik de applet om na te gaan dat elke weg is af te sluiten.

a Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...

b Neem voor de lengte van het grootste hek x. Wat geldt dan voor het middelste hek? En het kleinste hek?

c Hoe lang moeten het middelste en het kleinste hek samen zijn? Welke vergelijking krijg je daarmee?

d Los je vergelijking en daarmee het probleem op.

Opgave 16: Leeftijdenprobleem

Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was zij 26 jaar.

a Stel Joop's leeftijd op x jaar. Wat geldt dan voor Myrthe's leeftijd?

b Hun leeftijdsverschil is niet veranderd. Welke vergelijking levert dit op?

c Los de vergelijking die je hebt gevonden op. Hoe oud zijn beiden nu?

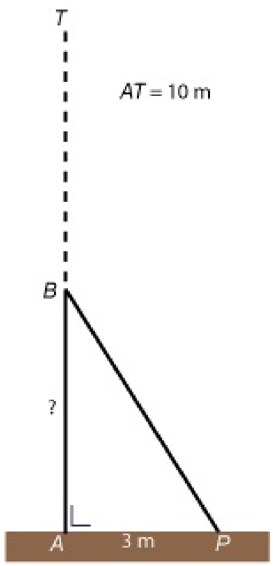
Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A. Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

a Je wilt weten op welke hoogte het breekpunt B zit. Welk lijnstuk wordt je onbekende?

b Er zit een rechthoekige driehoek in je figuur. Welke vergelijking levert dit op?

c Los de gevonden vergelijking op en bereken hoe hoog punt B boven de grond zit.



Figuur 6

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $15 + 0{,}25t = 26 - 1{,}5t$

b $20(a + 1)^2 + 100 = 1600$

c $\frac{1}{2}x + 6 = \frac{2x-5}{7}$

Opgave 19

Een vierkant stuk grond krijgt aan alle zijden een boswal die 3 m breed is. De oppervlakte van het stuk grond wordt daardoor verdubbeld.

a Noem de lengte van de zijde van het oorspronkelijke vierkant x.

Laat zien dat $(x + 6)^2 = 2x^2$.

b Bereken de lengte van de zijde van het oorspronkelijke vierkant in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode (of door terugrekenen)**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.