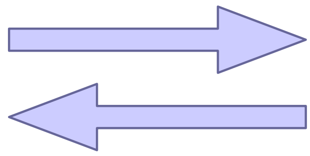
2.2 Terugrekenen

Inleiding

Soms kun je bij een vergelijking een rekenschema maken. En dan kun je zo'n vergelijking oplossen door terug te rekenen. Je loopt dan het rekenschema in omgekeerde richting door.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door middel van terugrekenen.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- rekenen met getallen en variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Laat een medeleerling een begingetal in gedachten nemen zonder het je te vertellen. Laat hem nu de volgende berekeningen doen:

- Doe het begingetal maal 2. Onthoud de uitkomst.
- Tel bij de uitkomst 6 op. Onthoud het resultaat.
- Haal van het resultaat van de vorige berekening 12 af. Onthoud weer het resultaat.
- Deel het resultaat door 6.

Als je nu het eindresultaat te horen krijgt, weet je zijn begingetal?

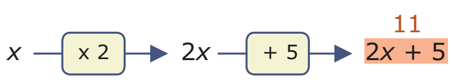
a Hoe kun je het begingetal vinden als je het eindresultaat van deze berekeningen hoort?

b Leg uit hoe dit werkt.

Opgave V2

Gegeven is de vergelijking $2x + 5 = 11$.

a Je ziet hier een bijpassend rekenschema. Maak er een terugrekenschema bij.



Figuur 2

b Gebruik dit terugrekenschema om de vergelijking op te lossen.

c Maak zelf een rekenschema en een terugrekenschema bij $2(x + 5) = 11$ en los zo deze vergelijking op.

Uitleg

Je hebt in voorgaande jaren bij het oplossen van een vergelijking soms gewerkt met een rekenschema. Dat beschrijft van begin tot eind wat er bij een vergelijking allemaal met de (onbekende) variabele gebeurt.

Bij een vergelijking als $3x + 5 = 20$ hoort het rekenschema:

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{+5} \overset{20}{3x+5}$$

Figuur 3

Houd daarbij rekening met de voorrangsregels.

Bij een rekenschema past een terugrekenschema:

$$\overset{5}{x} \xleftarrow{/3} \overset{15}{3x} \xleftarrow{-5} \overset{20}{3x+5}$$

Figuur 4

Zo ben je in staat om de waarde van de variabele x uit te rekenen: $x = (20 - 5)/3 = 5$. Deze waarde heet de oplossing van de gegeven vergelijking. Bij ingewikkelder vergelijkingen bestaat de oplossing soms uit meerdere waarden voor x.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het rekenschema voor de vergelijking $3x + 5 = 20$.

a Waarom is $x \xrightarrow{+5} \dots \xrightarrow{\times 3} 20$ geen juist rekenschema?

b Bij welke vergelijking is dit wel een juist rekenschema? Welke oplossing heeft die vergelijking?

c Waarom heeft het bij de vergelijking $3x + 5 = 2x$ geen zin om een rekenschema te maken?

d Waarom heeft het bij de vergelijking $x + \frac{1}{x} = 2$ geen zin om een rekenschema maken?

Opgave 2

Je wilt de vergelijking $2(x - 5) + 3 = 16$ oplossen.

a Doe dit met behulp van terugrekenen en zonder eerst de haakjes uit te werken.

b Je kunt ook eerst de haakjes uitwerken en dan terugrekenen. Laat zien dat je dan hetzelfde antwoord krijgt.

Opgave 3

Je wilt de vergelijking $0{,}5(x - 1)^2 = 8$ oplossen.

a Maak hierbij een passend rekenschema.

b Bij het maken van een terugrekenschema moet je vanuit een kwadraat terugrekenen. Hoe doe je dat? En waar moet je dan om denken?

c Los de vergelijking op met behulp van terugrekenen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele maar op één plaats voorkomt kun je vaak oplossen door **terugrekenen**. Het gaat dus om vergelijkingen van de vorm

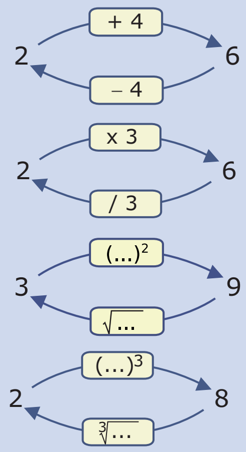
uitdrukking met op precies één plaats een variabele = uitkomst

Je gaat daarbij als volgt te werk:

- Je maakt een **rekenschema** waarin je uitgaande van de variabele laat zien welke rekenstappen er moeten worden gezet om aan de uitkomst te komen.
- Je maakt een **terugrekenschema** door uitgaande vanuit de uitkomst elke rekenstap te vervangen door zijn terugrekenstap.
- Je rekent de oplossing uit door het terugrekenschema uit te voeren.

Hierin is aftrekken de terugrekenstap van optellen, optellen de terugrekenstap van aftrekken, delen de terugrekenstap van vermenigvuldigen, vermenigvuldigen de terugrekenstap van delen, worteltrekken de terugrekenstap van kwadrateren en kwadrateren de terugrekenstap van worteltrekken. En je zult nog meer terugrekenmethoden gaan leren...

LET OP: Bij terugrekenen vanuit een kwadraat krijg je twee waarden!



Figuur 5

Voorbeeld 1

Los op: $2x^2 - 35 = -7$

Antwoord

Hier komt de variabele x op één plaats aan de linkerzijde van het isgelijkteken voor. Hier kan terugrekenen dus helpen.

- Rekenschema: $x \xrightarrow{\dots^2} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-35} -7$
- Terugrekenschema: $x \xleftarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xleftarrow{/2} \dots \xleftarrow{+35} -7$
  ofwel:
  $-7 \xrightarrow{+35} \dots \xrightarrow{/2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} x$

De oplossing is dus $x = \pm\sqrt{\frac{-7+35}{2}} = \pm\sqrt{14}$.
Het teken $\pm$ betekent dat er twee oplossingen zijn namelijk $x = \sqrt{14}$ en/of $x = -\sqrt{14}$.

Opgave 4

Gegeven is de vergelijking $3x^2 + 2 = 17$.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Hieronder zie je een terugrekenschema dat iemand bij deze vergelijking heeft gemaakt. Wat is er fout aan? Maak zelf het juiste terugrekenschema.

$17 \xrightarrow{-2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{/3} x$

c Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Opgave 5

Gegeven is de vergelijking $3(x^2 + 2) = 15$.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een terugrekenschema.

c Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Voorbeeld 2

Sommige vergelijkingen kun je oplossen door terugrekenen, andere niet. Hier zie je daar een paar voorbeelden van.

- $0{,}5x^3 + 2 = 8$
- $0{,}5x^3 + 2x = 8$
- $\sqrt{2x - 3} = 5$

Alleen de eerste en de derde vergelijking kun je oplossen door terugrekenen. De andere vergelijking niet, die is helemaal nog niet zo eenvoudig op te lossen anders dan met grafieken en inklemmen.

Opgave 6

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^3 + 2 = 8$ uit **Voorbeeld 2**.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de oplossing op.

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ uit **Voorbeeld 2**.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de oplossing op.

Opgave 8

De vergelijking $0{,}5x^3 + 2x = 8$ uit **Voorbeeld 2** kun je niet oplossen met behulp van terugrekenen.

a Vul deze tabel voor $y = 0{,}5x^3 + 2x$ in.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

Tabel 1

b Kun je nu uit de tabel de oplossing van deze vergelijking aflezen?

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van terugrekenen. Schrijf de antwoorden van de vergelijking exact op. Niet afronden dus!

a $5(x - 3) = -3$

b $2(x - 3)^2 = 50$

c $-0{,}2(-0{,}2x - 0{,}2) = -0{,}2$

d $2(x - 5)^3 = 31{,}25$

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op. Kies zelf de handigste manier van werken.

a $4\sqrt{x-2} = 2$

b $4\sqrt{x} - 2 = 2$

c $\frac{2}{x^2-1} = 1$

d $\sqrt{(x+2)^2 - 1} = 0$

Opgave 11

Janet lost de vergelijking $2(x-1)^2 = 50$ zo op:

- Rekenschema: $x \xrightarrow{-1} \ldots \xrightarrow{(\ldots)^2} \ldots \xrightarrow{\times 2} 50$
- Terugrekenschema: $50 \xrightarrow{/2} \ldots \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} \ldots \xrightarrow{+1} x$

Dus het antwoord is $x = 6$. Bij controle blijkt dit antwoord ook te kloppen.

Leg uit wat er fout gaat en verbeter haar uitwerking.

Opgave 12

Het Empire State Building is 381 m hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Iemand laat vanuit een raam op 371 m hoogte een steentje naar beneden vallen. De hoogte h in m boven de grond van dit steentje is afhankelijk van de valtijd t in seconden. Er geldt (als er geen luchtweerstand zou zijn): $h = 371 - 4{,}9t^2$. Op $t = 0$ wordt het steentje losgelaten.

a Na hoeveel seconden landt het steentje op de grond? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

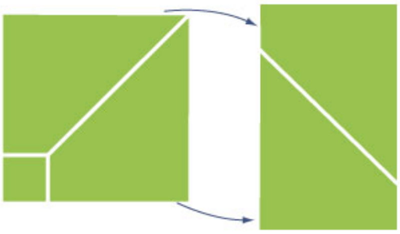
Voor de snelheid van het steentje geldt $v = 9{,}8t$, met v in m/s.

b Met welke snelheid landt dit steentje? Geef het antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Figuur 6

Opgave 13

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



Figuur 7

De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2. Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

Getallenraadsels zijn altijd weer aardig. Hier zie je er ééntje:

> Bedenk een getal zonder het me te vertellen. Vermenigvuldig het getal met 4. Tel bij het antwoord 20 op. Trek van de uitkomst twee keer het getal waarmee je begon af. Neem nu de helft van wat je hebt gevonden. Als je me de uitkomst vertelt, weet ik je begingetal.

De vraag is natuurlijk: Hoe kan dat?

Opgave 14: Getallenraadsels (1)

Bekijk het getallenraadsel in **Toepassen**.

a Kies een aantal van die geheime getallen. Wat is telkens de uitkomst van het getallenraadsel?

b Neem g voor het geheime getal. Wat is dan de uitkomst van het getallenraadsel?

c Hoe kun je dus gemakkelijk het getal raden?

Opgave 15: Getallenraadsels (2)

Neem een getal in gedachten en tel er 2 bij op. Vermenigvuldig de uitkomst met 4 en deel dan door 2. Haal nu twee maal jouw getal er weer van af. De uitkomst is altijd 4.

a Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.

b Maak zelf zo'n getallenraadsel.

Opgave 16: Getallenraadsels (3)

Mascha wil graag weten wanneer haar vriendin Jodka jarig is. Ze geeft haar het volgende raadsel op:

> Schrijf het nummer op van de maand waarin je jarig bent, maar laat het me niet zien. Vermenigvuldig dit getal met 5. Tel er 6 bij op en vermenigvuldig het resultaat met 4. Tel er 1 bij op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Tel daar tenslotte het nummer van de dag bij waarop je jarig bent en trek er nog 125 van af. Als je mij nu de einduitkomst vertelt, weet ik op welke datum je jarig bent.

Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen op door terugrekenen.

a $15 + 0{,}25t = 26$

b $20(a + 1)^2 = 1600$

c $4\sqrt{x - 1} = 12$

Opgave 18

Een vierkant stuk grond krijgt aan alle zijden een boswal die 3 m breed is. De oppervlakte van het stuk grond wordt daardoor vergroot tot 15000 m^2.

a Noem de lengte van een zijde van het oorspronkelijke vierkant x m.

Laat zien dat dan moet gelden: $(x + 6)^2 = 15000$.

b Bereken de lengte van de zijde van het oorspronkelijke vierkant in één decimaal nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.