1.5 Wortels

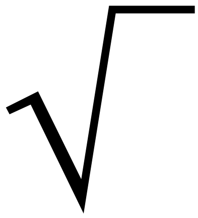
Inleiding

Wortels ontstaan uit het terugrekenen vanuit machten.

Zo ontstaat de 'gewone' wortel door terugrekenen vanuit een kwadraat.

Zo ontstaat de derdemachtswortel door terugrekenen vanuit een derde macht.

Enzovoort...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met (hogere machts) wortels, ook als daar variabelen in voor komen;
- uitdrukkingen waarin wortels voor komen vereenvoudigen.

Voorkennis

- rekenen met machten en terugrekenen vanuit machten;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden, ook met breuken en machten;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.
Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.
Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

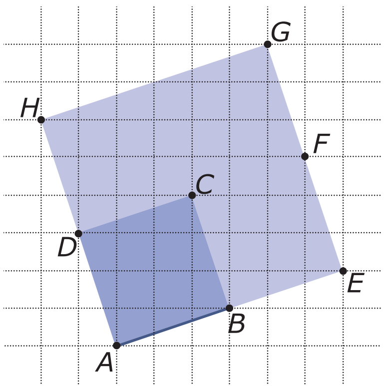
Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

d Laat ook zien, dat $2 \cdot \left(2\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.



Figuur 2

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.
Derde machtswortel trekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

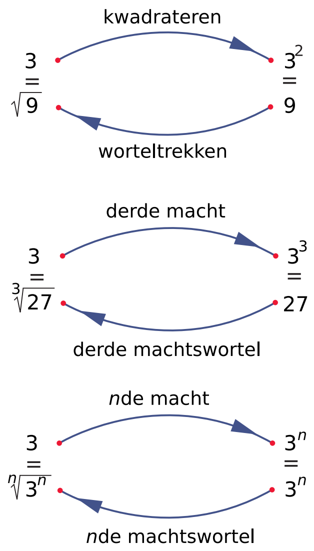
Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Zo geldt in het algemeen:

$\sqrt{a^2} = a$ als $a \geq 0$.

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen. Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Je weet al hoe dat gaat:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b > 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10}+2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.



Figuur 3

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derde machts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierde machts worteltrekken, enz.

Met dergelijke 'hogere machtswortels' kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Nu is:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{-343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

a Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?

b Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

d $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met ‘gewone’ wortels. Toch is er een verschil.

a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.

b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a. Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

d $\dfrac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

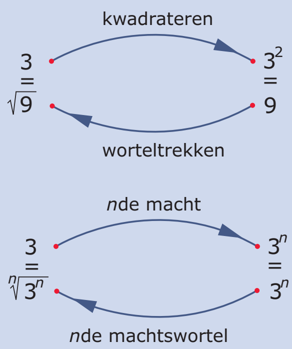
Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **nde machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een $n$de macht. Zo geldt in het algemeen:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.

Het rekenen met $n$de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b > 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.



Figuur 4

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b.

Voorbeeld 1

Hier zie je hoe je behulp van de rekenregels voor wortels enkele uitdrukkingen kunt vereenvoudigen.

- $\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = \sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
- $\sqrt{3a^2} + 2a\sqrt{12} = \sqrt{a^2 \cdot 3} + 2a\sqrt{4 \cdot 3} = a\sqrt{3} + 2a \cdot 2\sqrt{3} = 5a\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

b $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$

c $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)

d $3\sqrt{a^2 b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)

e $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$

f $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

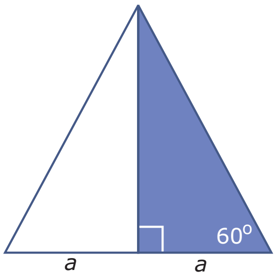
Opgave 5

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoekszijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben.

a Neem $a = 4$. Toon aan dat de hypotenusa dan een lengte van $4\sqrt{2}$ heeft.

b Toon aan dat de hypotenusa altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.

Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.



Figuur 5

c Neem $a = 4$. Laat zie dat de langste rechthoekszijde een lengte van $4\sqrt{3}$ heeft.

d Toon aan dat in het algemeen de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$ heeft.

Opgave 6

Van een kubus zijn alle zijvlaksdiagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a.

a Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiagonaal $4\sqrt{2}$ is.

b Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiagonaal $a\sqrt{2}$ is.

c Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $4\sqrt{3}$ is.

d Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $a\sqrt{3}$ is.

Voorbeeld 2

Bij breuken met wortels in de noemer is het vaak handig om die wortel weg te werken uit de noemer. Dat kun je doen door teller en noemer met die wortel te vermenigvuldigen. Bekijk deze voorbeelden maar.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

Bij hogere machtswortels is dit minder eenvoudig.

Opgave 7

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2**.

a Waarom wordt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vermenigvuldigt met $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?

b Waarom is $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

c Laat zelf zien dat $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

c $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$

d $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$

e $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

f $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 9

Oefen nu het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het **Practicum**.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 11

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $\left(\sqrt{6} - 1\right)^2$

d $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$

Opgave 12

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$ en $b > 0$.

a $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

b $\frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$

c $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$

Opgave 13

Een balk heeft ribben met een lengte van a, $2a$ en $3a$ cm.

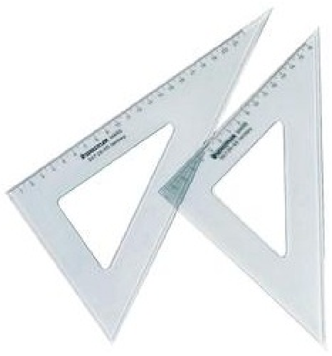
a Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.
De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek. Je hebt al eerder laten zien dat de zijden van die driehoek a, a en $a\sqrt{2}$ zijn.
De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Daarvan heb je laten zien dat de zijden a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ zijn.

Werk in de volgende opgaven met die tekendriehoeken.



Figuur 6

Opgave 14: Tekendriehoeken

Bekijk de twee tekendriehoeken in. Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

a Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 8 cm is?

b Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?

c Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?

Neem nu de andere tekendriehoek.

d Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 4 cm is?

e Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?

f Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?

g Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 6 cm is?

Opgave 15: Tekendriehoeken tegen elkaar

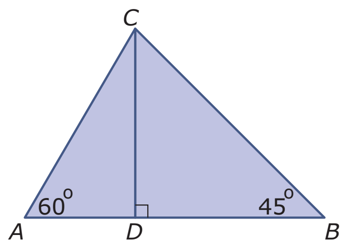
De driehoek hiernaast bestaat uit twee tekendriehoeken tegen elkaar.

a Hoe groot is de omtrek als de langste zijde 8 cm is?

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

Nu is BC geen 8, maar juist onbekend. De oppervlakte van de driehoek is $9 + 3\sqrt{3}$.

c Bereken de lengte van BC.



Figuur 7

Testen

Opgave 16

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\left(\sqrt{6} - 2\right)^2$

b $2\sqrt{75} + 6\sqrt{48}$

c $\sqrt{7} - \frac{14}{\sqrt{7}}$

d $4 \cdot \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$

Opgave 17

Herleid. Neem aan dat $a > 0$ en $b > 0$.

a $4\sqrt{a^4 b^2}$

b $\frac{3ab}{\sqrt{b}} - 2\sqrt{a^2}\sqrt{b}$

Practicum: Oefenen: werken met wortels

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten en wortels**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.