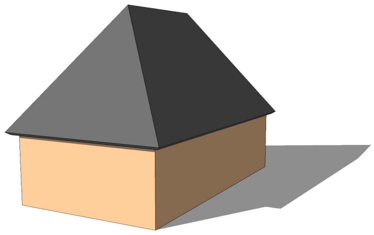
3.4 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Dit heet een schilddak, een dakvorm die je vaak op een stolpboerderij ziet.
Belanrijk bij de bouw ervan zijn de oppervlakte ervan (om te bepalen hoeveel dakbedekking er voor nodig is) en het volume er onder (om te bepalen hoeveel opslag/woon-ruimte er onder zit).



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- de inhoud (het volume) van ruimtelijke figuren berekenen;
- werken met oppervlakte- en volumevergrotingsfactoren.

Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties;
- werken met aanzichten van een doorsneden in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel zie je een aantal bekende formules voor het berekenen van een omtrek, een oppervlakte, of een inhoud. Ernaast staan de betekenissen van die formules, maar die staan niet in de juiste volgorde.

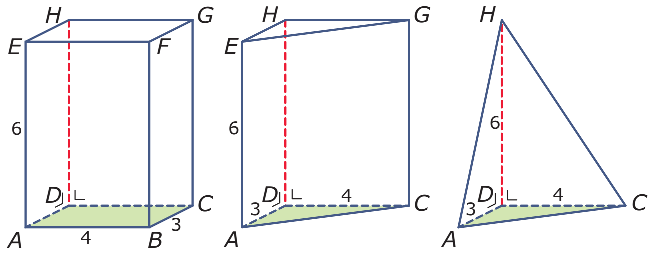
formule		betekenis	
1	0,5 × basis × hoogte	a	omtrek cirkel
2	lengte × breedte × hoogte	b	oppervlakte rechthoek
3	grondvlak × hoogte	c	oppervlakte driehoek
4	2π × straal	d	oppervlakte parallellogram
5	lengte × breedte	e	oppervlakte cirkel
6	$\frac{1}{3}$ × grondvlak × hoogte	f	inhoud balk
7	basis × hoogte	g	inhoud prisma
8	π × straal^2	h	inhoud piramide

Tabel 1

Geef bij elke formule de juiste omschrijving.

Uitleg

Je ziet hier drie lichamen die alle drie dezelfde hoogte DH hebben. Het prisma en de piramide hebben ook nog hetzelfde grondvlak ACD en dat is precies de helft van het grondvlak van de balk.



Figuur 2

De inhoud van de balk is duidelijk het grootst: $V(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$ eenheden (eenheidskubussen).

Het prisma is de helft van de balk, dus: $V(\text{prisma}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$.
Merk op dat dit precies de oppervlakte van het grondvlak (ΔACD) maal de hoogte is. En dat wist je ook wel: het volume van een prisma is $V(\text{prisma}) = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

De piramide heeft hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte als het prisma. Je kunt laten zien, dat er in het prisma drie piramides passen waarvan het product van grondvlak en hoogte hetzelfde is als dat van de getekende piramide. Elk van deze piramides heeft daarom dezelfde inhoud, namelijk $\frac{1}{3}$ deel van die van het prisma. Voor de getekende piramide geldt $V(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Van alle drie de getekende lichamen is de totale oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van hun uitslag. En wat gebeurt er met de oppervlakte en de inhoud van zo'n lichaam als alle ribben bijvoorbeeld 3 keer zo groot worden?

Opgave 1

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. De inhoud, het volume, van een lichaam is het aantal eenheidskubusjes dat er in past. Bij een balk en een prisma bepaal je dan eerst het aantal eenheidskubussen op het grondvlak en dan vermenigvuldig je met het aantal lagen, de hoogte, van de balk, het prisma. Zo krijg je de formule $V = G \cdot h$, waarin V het volume, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Laat zien, dat de formule $V = G \cdot h$ zowel bij de balk als bij het prisma tot de juiste inhoud leidt.

De oppervlakte van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

b Bereken de oppervlakte van de balk.

c Bereken de oppervlakte van het prisma.

d Neem nu eens aan dat de afmetingen van deze figuren 3 keer zo groot worden. Hoeveel keer zo groot wordt dan hun inhoud? En hun oppervlakte? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. Vergelijk de getekende piramide met het getekende prisma.

a Ga na, dat het prisma kan worden verdeeld in de piramides $ACD.H$, $CGH.E$ en $AHE.C$.

b Ga ook na, dat voor elk van deze piramides geldt dat $G \cdot h = 36$ waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

c Leg uit dat de inhoud van piramide $ACD.H$ daarom $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ moet zijn. Bereken deze inhoud.

Opgave 3

Er zijn ook lichamen met gebogen grensvlakken. Een cilinder en een kegel bijvoorbeeld hebben ook een grondvlak met oppervlakte G en een hoogte h.

a Waarom zal de formule voor de inhoud van een cilinder $V(\text{cilinder}) = G \cdot h$ zijn?

b Bereken de inhoud van een cilinder met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

c Waarom zal de formule voor de inhoud van een kegel $V(\text{kegel}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ zijn?

d Bereken de inhoud van een kegel met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Theorie en voorbeelden

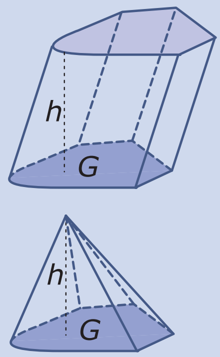
Om te onthouden

Onder de **inhoud** of het **volume** van een lichaam wordt het totaal aantal eenheidskubussen dat dit lichaam opvult verstaan.
Voor verschillende soorten lichamen kun je die inhoud berekenen met behulp van een formule.

- De inhoud van een balk, een prisma, of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = G \cdot h$.
- De inhoud van een piramide, of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Onder de **oppervlakte** van een lichaam wordt de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam verstaan.

Om zowel de inhoud als de oppervlakte van een lichaam te kunnen berekenen moet je de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren, zoals rechthoek, driehoek en cirkel kennen. Ook de formule voor de omtrek van een cirkel is van belang. Zorg dat je al deze formules goed kent!

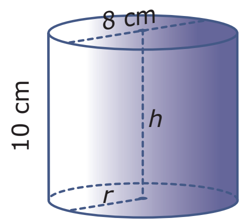


Figuur 3

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Een cilinder heeft een diameter van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder.



Figuur 4

Antwoord

Voor de inhoud V gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

Nu is $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ en $h = 10$.
En dus is $V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi$ cm^3.

Voor de oppervlakte A moet je weten hoe de uitslag van een cilinder er uit ziet. Die bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. De rechthoek heeft breedte 10 cm en als lengte de omtrek van de grondcirkel $\pi \cdot 8 = 8\pi$ cm.
Dus krijg je $A = 8\pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 112\pi$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden de inhoud en de oppervlakte van een cilinder met gegeven diameter en straal berekend. Neem nu een cilinder met diameter en hoogte precies 2 keer zo groot.

a Laat zien dat de inhoud van deze cilinder $2^3 = 8$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

b Leg uit hoe de oppervlakte van de cilinder in het voorbeeld wordt berekend.

c Laat zien dat de oppervlakte van de cilinder in deze opgave $2^2 = 4$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

Opgave 5

Een cilindervormig groentenblik heeft een straal van 6 cm en een hoogte van 16 cm. Het blik is gemaakt van metaal met een dikte van 1 mm. De straal en de hoogte zijn gemeten aan de binnenkant van het blik. Je wilt de hoeveelheid metaal die voor dit blik nodig is berekenen als er een plastic deksel op zit.

Je kunt dit op twee manieren doen: de oppervlakte van het blik berekenen en die met de dikte vermenigvuldigen, of van de inhoud van een blik met een straal van 6,1 cm en een hoogte van 16,1 cm de inhoud van een blik met straal 6 cm en hoogte 16 cm aftrekken.

Voer beide berekeningen uit en geef je antwoord in mm^3 nauwkeurig. Waardoor ontstaat het verschil tussen beide antwoorden?

Opgave 6

Van een cilinder is het vooraanzicht een rechthoek met een oppervlakte van 75 cm^2. Het bovenaanzicht is een cirkel met een oppervlakte van 60 cm^2.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Opgave 7

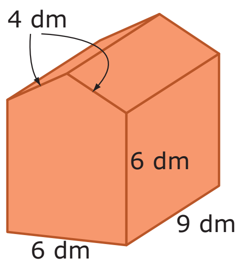
Van een cilindervormig literblik zijn hoogte en diameter gelijk.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze doos.



Figuur 5

Antwoord

Voor de inhoud V van deze doos gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het 'grondvlak' het voorvlak van het prisma, de hoogte is 9 dm.

Ga na, dat $G = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36 + 3\sqrt{7}$. Nu kun je met de formule berekenen dat de inhoud van de doos ongeveer 395 dm^3 is.

De oppervlakte van de doos is de oppervlakte van de uitslag van deze doos. Die uitslag bestaat uit twee gelijke vijfhoeken (waarvan je de oppervlakte al hebt berekend) en vijf rechthoeken. De totale oppervlakte is de som van de oppervlaktes van deze vijfhoeken en de vijf rechthoeken.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de inhoud en de oppervlakte van een prisma kunt berekenen.

a Leg uit hoe de oppervlakte van de vijfhoek die als 'grondvlak' dient, kan worden berekend.

b Reken nu de gevonden inhoud van de doos zelf na.

c Bereken de totale oppervlakte van de doos.

Opgave 9

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze piramide.

Opgave 10

Van een regelmatige vierzijdige piramide zijn alle ribben even lang. De oppervlakte van deze piramide is 1000 cm^2.

Hoe lang zijn de ribben van deze piramide in mm nauwkeurig?

Voorbeeld 3

Bij zandwinning ontstaan grote hopen van verschillende soorten zand. Die hopen zand hebben allemaal dezelfde kegelvorm.

Hoeveel m^3 zand bevat zo'n kegelvormige hoop met een diameter van 4 m en een hoogte van 1,50 m? En hoeveel m^3 zand bevat een hoop zand waarvan de afmetingen 2 keer zo groot zijn?

Figuur 6 Bron: Vlaams Instituut voor de Zee

Antwoord

Voor de inhoud V van een kegel gebruik je de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het grondvlak een cirkel met een straal van 2 m en de hoogte is 1,50 m.

De inhoud is dus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1.5 = 2\pi$ m^3.

Van de hoop zand waarvan alle afmetingen twee keer zo groot zijn is de lengtevergrotingsfactor 2 en dus de volumevergrotingsfactor $2^3 = 8$. De inhoud van die zandhoop is daarom $2\pi \cdot 8 = 16\pi$ m^3.

Opgave 11

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de inhoud van een kegel kunt berekenen.

a Bereken de inhoud van een kegel waarvan de straal 5 cm en de hoogte 10 cm is.

b Hoeveel bedraagt de inhoud van een kegel waarvan de afmetingen half zo groot zijn als die bij a?

c In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak 5 en de hoogte 10 is, of een kegel waarvan de straal 10 en de hoogte 5 is? Verklaar je antwoord.

d In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak a en de hoogte b is, of een kegel waarvan de straal b en de hoogte a is? Verklaar je antwoord.

Opgave 12

In een betonblok in de vorm van een kubus met ribben van 50 cm wordt een kegelvormig gat geboord. Dit kegelvormige gat heeft een diameter van 15 cm en een diepte van 40 cm.

Uit hoeveel cm^3 beton bestaat dit betonblok met gat?

Verwerken

Opgave 13

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave wordt uitgegaan van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Houd geen rekening met de dikte van het blik.

Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

a Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Teken op schaal 1 : 4 de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.

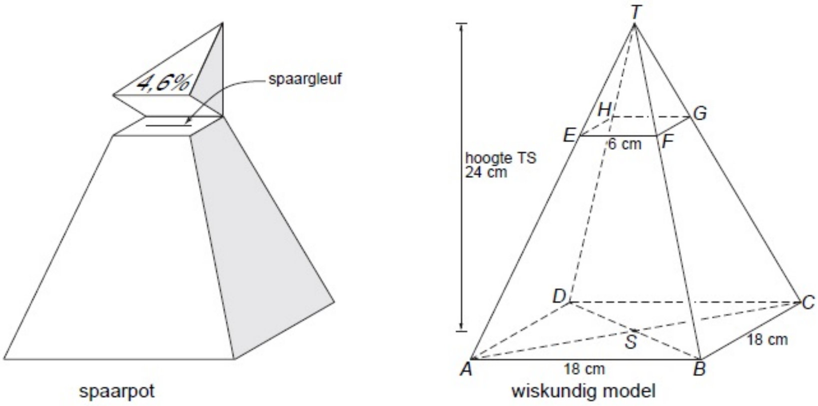
c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de inhoud van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.

Er zijn blikken nodig met een inhoud van 2500 cm^3. De blikken worden zo gemaakt dat er zo weinig mogelijk metaal voor nodig is. De hoeveelheid metaal die nodig is voor een blik, is zo klein mogelijk als de hoogte van het blik 2 keer zo groot is als de straal.

d Bereken hoeveel cm de straal en de hoogte van dit blik zijn. Geef je antwoorden in één decimaal.

Opgave 14

Een spaarpot heeft de vorm van een regelmatige piramide met een vierkant grondvlak. In de linkerfiguur hieronder zie je een tekening van de spaarpot. Daarnaast staat een wiskundig model met de maten van de spaarpot.



Figuur 7

De spaarpot heeft een deksel. Dat is piramide $T.EFGH$. Het scharnier, waarom de deksel omgeklapt kan worden, is lijnstuk HG.

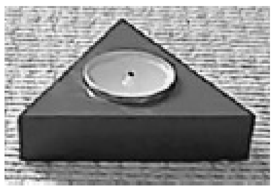
a De bank die deze spaarpot cadeau geeft beweert dat de inhoud van de deksel 4,6% van de inhoud van de hele piramide is. Laat met een berekening zien dat dit niet waar is.

b De spaarpot wordt cadeau gegeven in de vorm van een bouwplaat. Hoeveel oppervlakte aan karton is er nodig voor deze spaarpot? Houd geen rekening met de opening om geld in te doen en geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

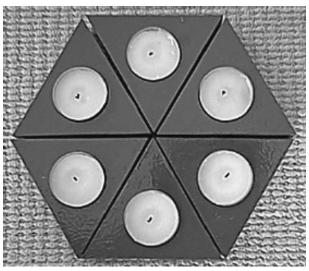
(bron: examen vmbo-t 2005 - II)

Opgave 15

Op de foto hiernaast zie je een houder waarin een sfeerlichtje zit. Deze sfeerlichthouder heeft de vorm van een prisma met een gelijkzijdige driehoek als grondvlak. Op de foto hieronder zie je het bovenaanzicht van een figuur gemaakt van zes van deze sfeerlichthouders.



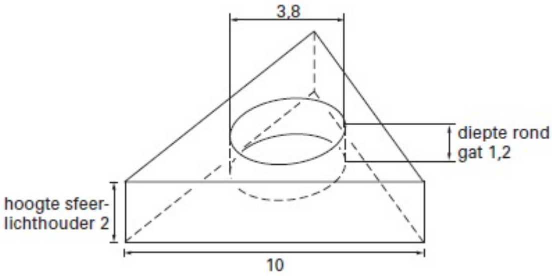
Figuur 8



Figuur 9

a Geef de kleinste hoek in graden waarover dit bovenaanzicht draaisymmetrisch is.

Hieronder zie je een tekening van de sfeerlichthouder. De sfeerlichthouder is massief en gemaakt van kunststof. De zijden van het driehoekige grondvlak zijn 10 cm. De hoogte van de sfeerlichthouder is 2 cm. Precies in het midden van de sfeerlichthouder zit een rond gat voor het sfeerlichtje. De diameter van dit gat is 3,8 cm en de diepte is 1,2 cm.



Figuur 10

b Bereken in hele cm^3 hoeveel kunststof er nodig is om deze sfeerlichthouder te maken.

(bron: examen vmbo-t 2003 - I)

Opgave 16

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

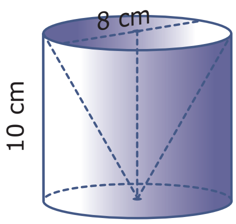
Figuur 11

a Bereken de inhoud van het doosje in cm^3 nauwkeurig.

b Een model van dit Drostedoosje is een regelmatig achthoekig prisma met opstaande ribben van 3,3 cm en andere ribben van 7,8 cm. Bereken de oppervlakte van zo'n prisma in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 17

Je ziet hier een cilindervormige plastic bak waar een kegel uit is weggesneden.



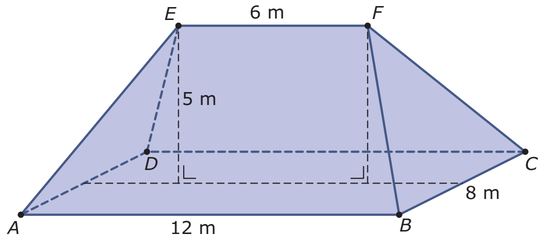
Figuur 12

a Bereken de hoeveelheid plastic die hiervoor nodig is.

b Bereken de hoeveelheid plastic die nodig is voor eenzelfde bak waarvan alle afmetingen 1,5 keer zo groot zijn.

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD. Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



Figuur 13

De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

Opgave 18: Stolpboerderij: volume onder het dak

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij in. Gebruik de gegevens in de figuur.

Bereken het volume onder dit dak en boven de zoldervloer.

Opgave 19: Stolpboerderij: dakoppervlak

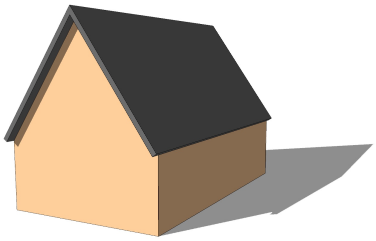
Gebruik de gegevens in de figuur van het dak van de stolpboerderij hierboven.

Bereken de oppervlakte van het dak.

Testen

Opgave 20

De dakvorm van dit huis heet zadeldak en bestaat uit twee grensvlakken van een prisma.
Neem aan dat de voorkant (en de achterkant) van dit prisma aan gelijkbenige driehoek is met een basis van 8 m en een hoogte van 5 m. De lengte van het zadeldak is 12 m en het steekt aan beide zijden 30 cm uit.



Figuur 14

a Bereken de oppervlakte van het zadeldak in m^2 nauwkeurig.

b Bereken de inhoud van het prisma.

c Hoe groot is de dakoppervlakte van een huis waarvan alle afmetingen 1,5 keer zo groot zijn, maar dat verder volkomen gelijkvormig is met dit huis? Geef je antwoord weer in m^2 nauwkeurig.

Opgave 21

Dit is een luchtfoto van de Buddenturm in Münster.
Het gebouw stamt uit 1150 en is in totaal 30 m hoog. Stel, de binnendiameter van de toren is 6 m en van de kegelvormige spits is de hoogte gelijk aan de diameter van het grondvlak.

Bereken dan het totale binnenvolume van deze toren in m^3 nauwkeurig.

Figuur 15