3.3 Doorsneden

Inleiding

Dit is een dwarsdoorsnede van een boom, je ziet de jaarringen. Zo'n doorsnede is altijd een plat vlak binnen de randen van de figuur, in dit geval de bast van de boom (op een bepaalde hoogte). Zo kun je ook vloeren in gebouwen als doorsneden opvatten en worden die met name in de architectuur vaak op schaal getekend om er berekeningen in te kunnen uitvoeren.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden herkennen in ruimtelijke figuren;
- wat je verstaat onder kruisende lijnen;
- doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen en erin rekenen.

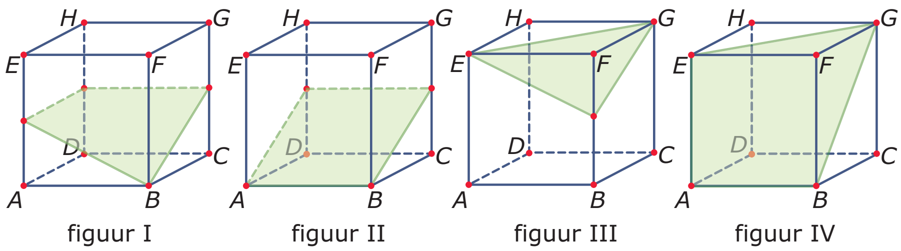
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier en op het **werkblad** vier kubussen met ribben van 2 cm. Joop heeft geprobeerd om in elke kubus te laten zien hoe een bepaald plat vlak de kubus doorsnijdt.



Figuur 2

a Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?

b Verbeter de foute figuren.

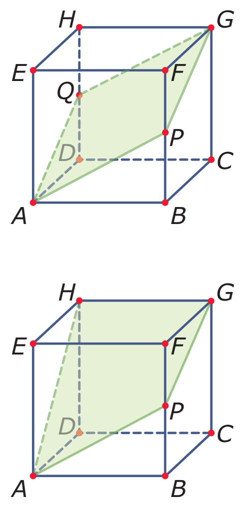
c Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Uitleg

Je ziet hiernaast de doorsnede $APGQ$ van een plat vlak met een kubus getekend. De kubus heeft ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Als je naar de kubus kijkt loodrecht op diagonaalvlak $ACGE$ (dus in richting BD), zie je A, B, P en Q op één lijn liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QC) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak. Bedenk dat lijnen die in één vlak liggen elkaar altijd snijden of evenwijdig lopen. Lijnen die elkaar niet snijden èn niet evenwijdig lopen noem je 'kruisende lijnen'. In een vlak kunnen nooit kruisende lijnen liggen! En daarom kan de 'vierhoek' $APGH$ nooit een vierhoek in een plat vlak zijn: de lijnstukken AH en PG zijn niet evenwijdig en liggen dus op kruisende lijnen.

Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien moet je de kubus zo draaien dat je loodrecht op dat vlak kijkt. Je ziet dan dat $APGQ$ een ruit is met ribben van $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk de kubussen in de **Uitleg**. Je ziet dat in de bovenste kubus een vlak $APGQ$ is getekend.

a Teken het aanzicht van de bovenste kubus waarbij je kijkt in de richting van BD met het vlak $APGQ$ er in. Waaraan zie je dat $APGQ$ een plat vlak is?

b Kun je van de onderste kubus een aanzicht tekenen waarbij de punten A, P, G en H op één lijn liggen?

c Waarom zijn de zijden van $APGQ$ in twee overstaande vlakken van de kubus evenwijdig? En waarom zijn ze dus ook gelijk?

d Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

e Bereken de lengte van diagonaal AG.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt gesproken over kruisende lijnen.

a Waarom zijn de lijnen AH en PG kruisend?

b Zijn de lijnen AP en HG kruisend, of snijdend? (Denk er om dat deze lijnen ook buiten de lijnstukken AP en HG doorlopen.)

c Zijn de lijnen AP en EF kruisend, of snijdend?

Opgave 3

In kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm is vierhoek $KCGL$ een doorsnede van een plat vlak met de kubus. Punt K is het midden van ribbe AB.

a Waarom is driehoek KCG geen complete doorsnede van een vlak met deze kubus?

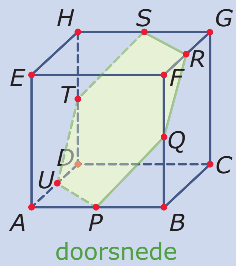
b Waarom moet punt L het midden van ribbe EF zijn?

c Teken de doorsnede $KCGL$ op ware grootte.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Heeft die doorsnede de vorm van een driehoek, dan kun je ervan verzekerd zijn dat het inderdaad om een plat vlak gaat. Bij vierhoeken, vijfhoeken, etc., moet je nauwkeuriger kijken. Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, kun je gebruiken dat in een plat vlak alleen evenwijdige of elkaar snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn èn elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Lijnen die elkaar kruisen kunnen nooit in één vlak liggen.

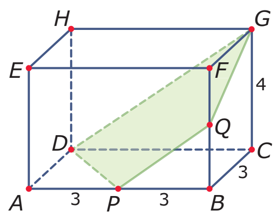


Figuur 4

Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**. Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke vorm hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal getekend). Bij het tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken m.b.v. de passer. Teken hulpfiguren waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 3$, $CG = 4$.
De punten P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.
Waarom is vierhoek $DPQG$ een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk?
Teken doorsnede $DPQG$ op ware grootte.



Figuur 5

Antwoord

Vierhoek $DPQG$ is een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk omdat de lijnen PQ en DG evenwijdig lopen.

De lengte van DG kun je halen uit rechthoekige ΔDCG: $DG = \sqrt{52}$.

De lengte van DP kun je halen uit rechthoekige ΔDAP: $DP = \sqrt{18}$.

Omdat $BQ = 2$ kun je de lengtes van PQ en QG ook berekenen: $PQ = QG = \sqrt{13}$.

Om het trapezium $DPQG$ te kunnen tekenen, is het handig om eerst nog de lengte van een diagonaal te berekenen, bijvoorbeeld $PG = \sqrt{34}$. Nu kun je de figuur construeren door twee driehoeken te maken met passer en liniaal.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** is een doorsnede van een plat vlak met een balk getekend. Je wilt die doorsnede op ware grootte tekenen.

a Waarom zijn de lijnen PQ en DG evenwijdig?

b Bereken de lengte van DG en die van DP.

c Reken nu de lengtes van PQ en QG na.

d Bereken de lengte van diagonaal PG.

e Teken trapezium $DPQG$ op ware grootte.

Opgave 5

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG en K ligt op BF met $BK = 1$ cm.

a Is $HMKN$ een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

b Is KEG een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

c Is KMN een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

Vierhoek $HMBN$ is een doorsnede van een vlak met de gegeven balk.

d Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 6

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG.

Er worden nu steeds twee lijnen gegeven. Schrijf op of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

a MH en BN.

b MB en HC.

c AE en HG.

d MF en AB.

e MN en HB.

f CM en AF.

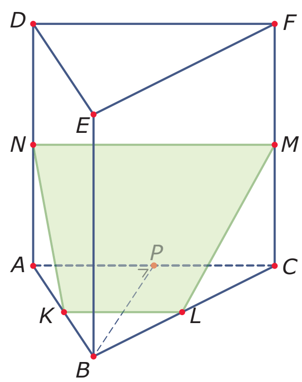
Opgave 7

Hier zie je een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ waarvan alle ribben 8 cm lang zijn. De punten P, K, L, M en N zijn steeds de middens van de ribben waar ze op liggen.

a Waarom is vierhoek $KLMN$ de doorsnede van een vlak met dit prisma?

b Teken vierhoek $KLMN$ op ware grootte. Schrijf alle daarvoor noodzakelijke berekeningen op.

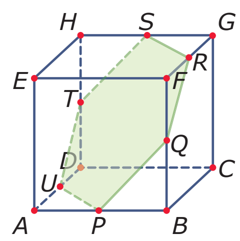
c Bereken (als je dat bij b nog niet hebt gedaan) alle hoeken van vierhoek $KLMN$ in graden nauwkeurig.



Figuur 6

Voorbeeld 2

Je ziet hier een doorsnede van een plat vlak met een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm. Alle hoekpunten van deze doorsnede zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.
Teken doorsnede $PQRSTU$ op ware grootte.



Figuur 7

Antwoord

De doorsnede is een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met zijden $\sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ cm.

Hoe je een regelmatige zeshoek tekent heb je al eerder gezien.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je dat de doorsnede van een plat vlak met een kubus een zeshoek kan zijn.

a Waarom weet je zeker dat hier sprake is van een doorsnede van een kubus en een plat vlak?

b Hoe teken je deze zeshoek op ware grootte?

c Kan de doorsnede van een vlak en een kubus ook een vijfhoek zijn? Schets of beschrijf daarvan een voorbeeld.

d Geef ook voorbeelden waarbij de doorsnede van een vlak en een kubus een vierhoek of een driehoek is.

Opgave 9

In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm is een doorsnede $KLMH$ getekend. Hierin ligt punt K op ribbe AE zo, dat $AK : KE = 3 : 1$. Verder ligt punt M op ribbe CG zo, dat $CM : MG = 3 : 1$.

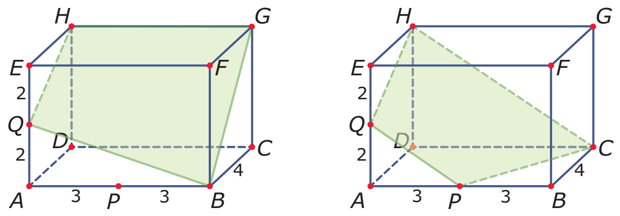
a Waarom moet punt L dan het midden zijn van ribbe BF?

b Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf de noodzakelijke berekeningen op.

Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier in balk $ABCD.EFGH$ twee keer een figuur getekend die vier hoekpunten heeft.



Figuur 8

Leg uit bij welke van beide figuren er sprake is van de doorsnede van een plat vlak en de getekende balk. Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P, Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.

Schrijf van de volgende lijnen op of ze elkaar snijden, elkaar kruisen, of evenwijdig zijn. Licht je antwoord toe.

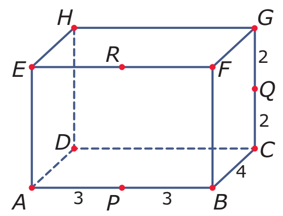
a PQ en BF.

b PQ en RG.

c PR en GH.

d RG en PC.

e PC en AD.



Figuur 9

Opgave 12

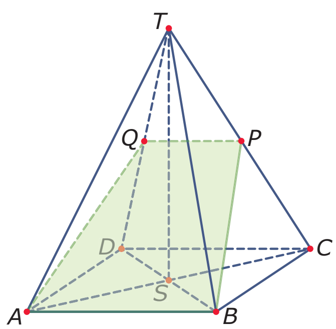
Van de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is punt P het midden van ribbe CT en punt Q het midden van ribbe DT. Verder is gegeven dat $AB = BC = 8$ cm en $AT = 12$ cm.

a Bereken de lengte van lijnstuk BP.

Vierhoek $ABPQ$ is de doorsnede van de piramide met een vlak.

b Teken deze doorsnede op ware grootte.

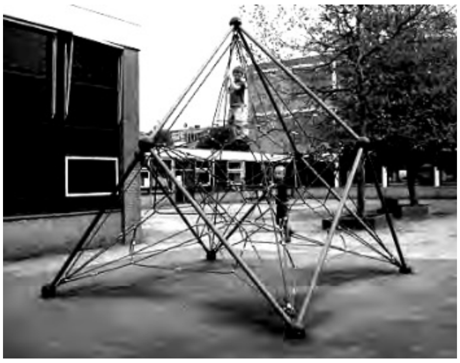
c Bereken de hoeken van vierhoek $ABPQ$ in graden nauwkeurig.

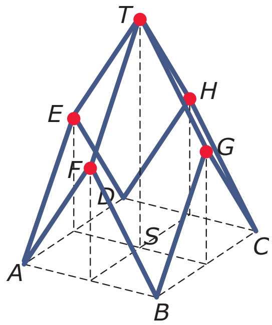


Figuur 10

Opgave 13

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60°. Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$. De vier ruiten vormen samen met de vier opstaande driehoeken en het vierkante grondvlak een lichaam.





Figuur 11

a Bereken de hoeken van dwarsdoorsnede ACT van dit lichaam in graden nauwkeurig.

Neem aan dat M het midden van AD en N dat van BC is.

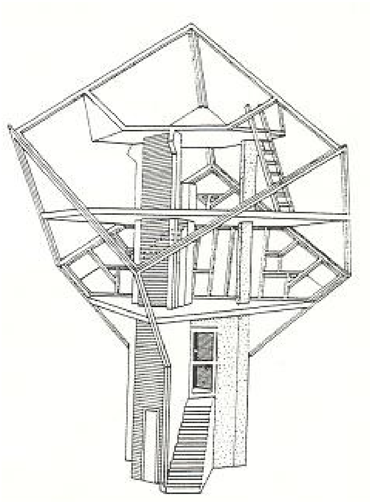
b Teken de dwarsdoorsnede $MNGTE$ van dit lichaam op ware grootte.

(bron: vmbo TL examen 2011 - I)

Toepassen

De **kubuswoning** ontworpen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn van deze kubuswoningen gebouwd. Hiernaast zie je een opengewerkt model. Het betreft in grote lijnen een kubus die op zijn punt staat, er zitten dus twee hoekpunten die zijn verbonden met een lichaamsdiagonaal recht boven elkaar. Deze kubus staat op een brede paal waarin zich de toegang bevindt.

In de kubuswoning zitten drie vloeren, de onderste vloer is driehoekig, de middelste zeshoekig en de bovenste eigenlijk weer driehoekig, maar daar zijn opstaande driehoekige wanden gemaakt die evenwijdig lopen met vlakken van de kubus.



Figuur 12

Opgave 14: Kubus op zijn punt

Bekijk het opengewerkte model van een kubuswoning in **Toepassen**. Je gaat dit model zelf tekenen met behulp van het **werkblad**.

a Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

Neem aan dat de middelste vloer de middens van de ribben met elkaar verbindt.

b Teken die vloer in jouw kubus.

Neem aan dat de bovenste vloer halverwege de middelste vloer en de top van de kubus zit. Er zijn drie opstaande driehoekige zijwanden op gemaakt.

c Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.

Opgave 15: Rekenen aan de kubuswoning

Je hebt in de voorgaande opgave zelf een eenvoudige kubuswoning getekend. Ga er weer van uit dat de middelste verdiepingsvloer de middens van de ribben verbindt en dat de bovenste verdiepingsvloer halverwege de middelste verdiepingsvloer en de top van de kubus zit. Neem aan dat de hoogte tussen de bovenste twee verdiepingsvloeren 2,50 m is.

a Hoe hoog zit dan de top van de kubus boven de onderste punt ervan?

b Hoe groot zijn dan alle ribben van de kubus?

c De hoek tussen de lijnstukken AH en AG is de hoek die alle grensvlakken van de kubus met de verticale lijn AG maken. Bereken deze hoek in tienden van graden nauwkeurig.

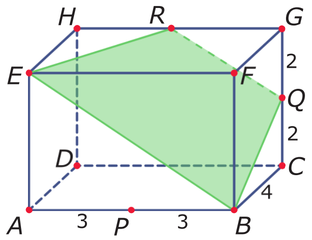
Testen

Opgave 16

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P, Q en R die telkens het midden zijn van de ribbe waarop ze liggen.

a Leg uit, waarom vlak $EBQR$ een doorsnede van de balk is.

b Welke van de volgende lijnen kruisen elkaar: PR, BG, BQ en PH?



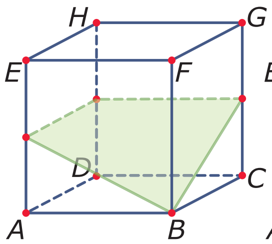
Figuur 13

Opgave 17

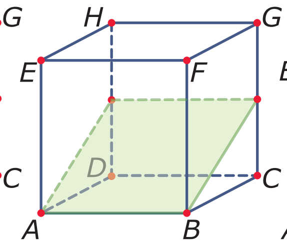
Bekijk de balk uit de voorgaande opgave nog eens.

Teken de doorsnede $EBQR$ op ware grootte. Bereken daartoe de zijden van de vierhoek en één diagonaal ervan en leg uit hoe je daarmee die doorsnede construeert.

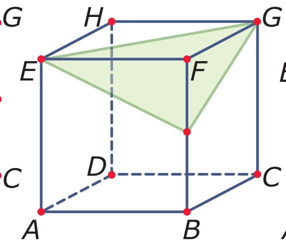
Werkblad bij Opgave V1 op pagina 1



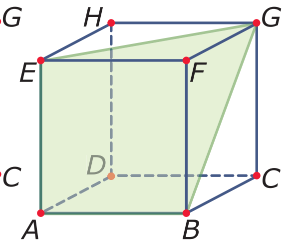
figuur I



figuur II

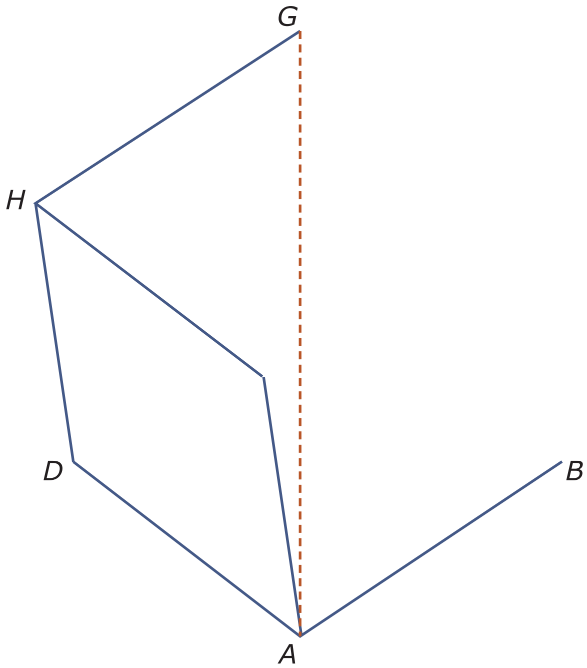


figuur III



figuur IV

Werkblad bij **Opgave 14 op pagina 6**



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.