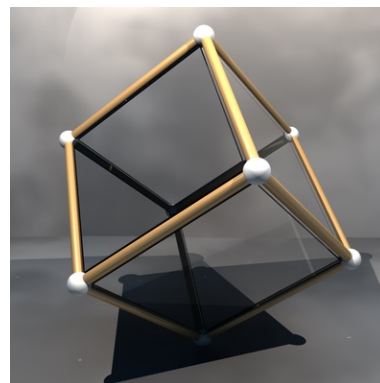


## 3.1 Lichamen

### Inleiding

Hier zie een kubus gemaakt met behulp van **Blender**, een computerprogramma waarmee mooie 3D effecten kunnen worden bereikt. Je gaat nu de eerder geleerde meetkundige rekentechnieken toepassen in 3D.



Figuur 1 bron: Wikipedia

### Je leert in dit onderwerp

- de al bekende rekentechnieken (zoals de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie) toepassen in ruimtelijke situaties.

### Voorkennis

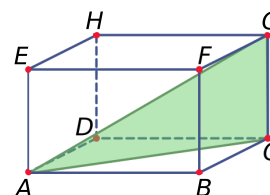
- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie.

### Verkennen

#### Opgave V1

Je ziet hier een balk  $ABCD.EFGH$  met  $AB = 10$  cm,  $BC = 4$  cm en  $AE = 5$  cm.

Bereken  $\angle GAC$ .



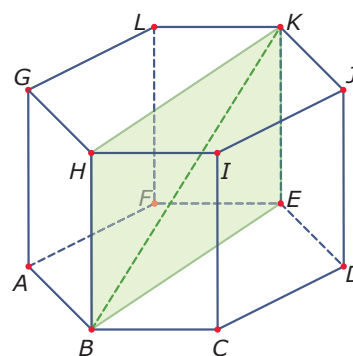
Figuur 2

### Uitleg

Het probleem bij **Verkennen V1** heb je waarschijnlijk wel meteen kunnen oplossen. Daarbij heb je dan gebruik gemaakt van kennis over ruimtelijke figuren. Je moet weten wat een balk is, waar de rechte hoeken in een balk zitten, en dergelijke meer.

Je noemt een ruimtelijke figuur vaak een lichaam. Zo'n lichaam heeft één of meer grensvlakken, die vaak plat, maar ook gebogen kunnen zijn. Gebogen grensvlakken heb je bij een bol, een kegel, een cilinder.

Lichamen die alleen uit platte grensvlakken bestaan heten veelvlakken. Deze hebben hoekpunten en ribben. Ook zijn er dan vaak diagonalen in twee soorten: zijvlaksdiaalenen en lichaamsdiagonalen.



Figuur 3

Het veelvlak  $ABCDEF.GHIJKL$  bijvoorbeeld heet een regelmatig zeshoekig prisma. Dat komt omdat van dit lichaam:

- het grondvlak en het bovenzvlak congruente regelmatige zeshoeken zijn;
- alle opstaande zijvlakken rechthoeken zijn.

In feite is elke doorsnede van dit lichaam die evenwijdig is met het grondvlak een regelmatige zeshoek.

Verder zie je diagonaalvlak  $BEKH$  met daarin lichaamsdiagonaal  $BK$ .

In de **Theorie** vind je een overzicht van de belangrijkste lichamen en hun eigenschappen.

### Opgave 1

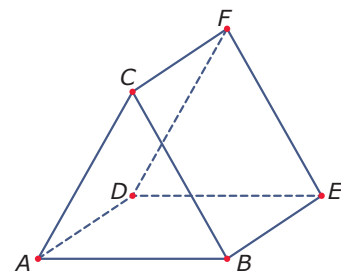
Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een voorbeeld van een prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn.

- Hoeveel hoekpunten, hoeveel ribben en hoeveel grensvlakken heeft dit prisma?
- Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma? En hoeveel lichaamsdiagonalen?
- Teken het grondvlak van dit prisma op ware grootte. Leg uit, waarom diagonaal  $BE = 8$  cm en diagonaal  $BF = 2\sqrt{12}$  cm.
- Teken het diagonaalvlak  $BEKH$  op ware grootte. Bereken de grootte van  $\angle EBK$  in graden nauwkeurig.
- Teken het diagonaalvlak  $BFLH$  op ware grootte en bereken de grootte van  $\angle FBL$  in graden nauwkeurig.

### Opgave 2

Je ziet hier een ander prisma, de figuur staat ook op het **werkblad**. Hier zijn het voorvlak en het achtervlak congruente gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm. Alle andere grensvlakken zijn vierkanten.

- Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?
- Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma?
- $M$  is het midden van ribbe  $CF$ . Teken  $\triangle ABM$  zowel in de figuur als op ware grootte.
- Bereken de grootte van  $\angle AMB$  in graden nauwkeurig.

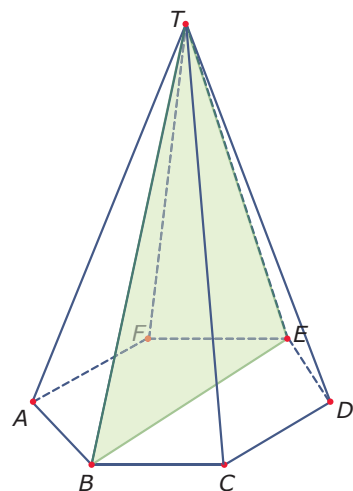


Figuur 4

### Opgave 3

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide  $ABCDEF.T$ . Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. Alle opstaande ribben zijn 24 cm.

- Heeft deze piramide lichaamsdiagonalen? En zijvlaksdagonalen? En diagonaalvlakken?
- Bereken de grootte van  $\angle BTE$  in graden nauwkeurig.
- Bereken de grootte van  $\angle BTF$  in graden nauwkeurig.



Figuur 5

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken. Je ziet hier een overzicht van enkele veel voorkomende lichamen.

Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**. Piramides en prisma's hebben een **grondvlak** en een **hoogte**.

Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken.

### Voorbeeld 1

Hier zie je een balk  $ABCD.EFGH$ . In het diagonaalvlak  $ACGE$  is de lichaamsdiagonaal  $AG$  getekend. Ook zie je daarin lijnstuk  $AM$ , waarbij  $M$  het midden van  $EG$  is. In deze figuur is  $AB = 8$  cm,  $BC = 6$  cm en  $CG = 5$  cm.

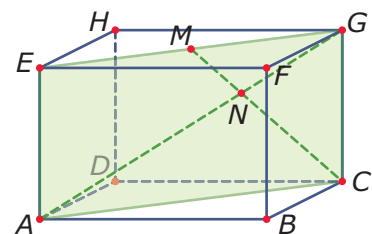
Bereken de lengte van lijnstuk  $CN$  in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Het lijnstuk waarvan je de lengte wilt berekenen ligt in diagonaalvlak  $ACGE$  en dat is een rechthoek met zijden  $AC = 10$  cm en  $CG = 5$  cm.

Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je de lengte van zowel  $AG$  als  $CM$  berekenen. En dan kun je met gelijkvormigheid werken. Zie je al welke driehoeken gelijkvormig zijn?

Je vindt  $CN \approx 4,71$  cm.



Figuur 6

### Opgave 4

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

- Leg uit waarom  $AC = 10$  cm.
- Bereken nu zelf de lengtes van  $AG$  en  $CM$ .
- Welke twee gelijkvormige driehoeken vind je in diagonaalvlak  $ACGE$ ? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van  $CN$ .

### Opgave 5

Van een kubus  $ABCD.EFGH$  met ribben van 4 cm is  $M$  het midden van ribbe  $GH$ .

- Bereken de lengte van elke lichaamsdiagonaal van deze kubus.
- Bereken de lengte van  $AM$ .

### Opgave 6

Bekijk de verschillende lichamen nog eens, zie de [Theorie](#).

- Bestaat er een veelvlak dat geen enkele diagonaal heeft?
- Hoeveel hoekpunten, ribben en grensvlakken heeft een regelmatig achzijdig prisma?

Volgens de formule van Euler geldt voor een veelvlak (zonder deuken) dat  $G + H = R + 2$  als  $G$  het aantal grensvlakken,  $H$  het aantal hoekpunten en  $R$  het aantal ribben is.

- c Voldoet een regelmatig achtzijdig prisma aan de formule van Euler?
- d Welke lichamen hebben geen ribben?

### Voorbeeld 2

Je ziet hier de regelmatige vierzijdige piramide  $ABCD.T$ . Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. De hoogte is 8 cm. De punten  $M$  en  $N$  zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

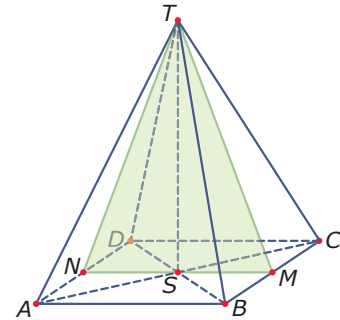
Bereken de grootte van  $\angle NTM$ .

Antwoord

$\triangle NTM$  is gelijkbenig, dus  $\angle NTS$  is de helft van  $\angle NTM$ .

Nu is  $NS = 3$  cm en  $TS = 8$  cm, dus  $\tan(\angle NTS) = \frac{3}{8} = 0,375$ .

En dus is  $\angle NTS \approx 20,6^\circ$  en  $\angle NTM \approx 41^\circ$ .



Figuur 7

### Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je met behulp van goniometrie een hoek in een ruimtelijke figuur berekent.

- a Waarom is  $\triangle NTM$  gelijkbenig?
- b Waarom wordt er in het voorbeeld met tangens gewerkt? Is dat noodzakelijk?
- c Bereken  $\angle ATC$ .

### Opgave 8

Een kubus  $ABCD.EFGH$  heeft ribben van 4.  $P$  is een punt op ribbe  $GH$  en  $PH = 1$  cm.  $S$  is het snijpunt van  $AP$  en  $BH$ .

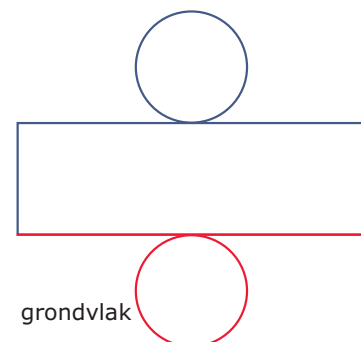
- a Bereken de lengte van  $AS$ .
- b Bereken de grootte van  $\angle ASB$  in graden nauwkeurig.

### Voorbeeld 3

Hoe ziet een uitslag van een cilinder met een straal van 4 cm en een hoogte van 8 cm er uit?

Antwoord

Als een rechthoek met een lengte die net zo groot is als de omtrek van de grondcirkel en een breedte van 8 cm. Daar zitten dan twee cirkels met een straal van 4 cm aan vast, eentje aan de bovenkant en eentje aan de onderkant.



Figuur 8

### Opgave 9

Teken de uitslag van de cilinder beschreven in **Voorbeeld 3** op schaal 1 : 2.

**Opgave 10**

Teken een uitslag van een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 4 bij 4 cm en een hoogte van 8 cm.

**Verwerken****Opgave 11**

Gegeven is een kubus  $ABCD.EFGH$  met zijden van 4,5 cm.

Bereken de grootte van de hoeken  $HBD$  en  $FCA$ .

**Opgave 12**

Piramide  $ABCD.T$  heeft vier gelijke opstaande ribben van 10 cm. Het grondvlak is een rechthoek met  $AB = 8$  cm en  $BC = 6$  cm.

- Bereken de hoogte van deze piramide.
- Bereken de grootte van de hoeken  $ATC$  en  $BAT$ .

**Opgave 13**

Balk  $ABCD.EFGH$  heeft ribben  $AB = 4$ ,  $AD = 3$  en  $AE = 3$ . Punt  $S$  is het snijpunt van alle lichaamsdiagonalen.

- Bereken  $\angle ASB$  in graden nauwkeurig.
- Bereken  $\angle ASC$  in graden nauwkeurig.

De punten  $P$  en  $Q$  liggen op ribbe  $AB$ .  $AP = 1$  en  $BQ = 1$ .  $R$  is het snijpunt van  $PG$  en  $QH$ .

- Bereken  $\angle PRQ$  in graden nauwkeurig.

**Opgave 14**

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

- Welke ruimtelijke figuur stelt het doosje bij benadering voor?
- Hoe groot zijn de hoeken van de achthoekige bodem van zo'n doosje?
- Hoe groot is het langste rechte staafje dat je nog op de bodem van dit doosje kunt leggen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Hoe groot is het langste rechte staafje dat in dit doosje past?



Figuur 9

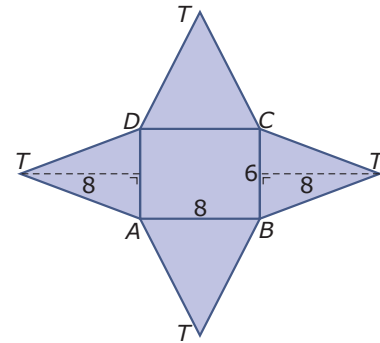
**Opgave 15**

Teken een uitslag van een cilinder waarvan hoogte en diameter 10 cm zijn.

### Opgave 16

Je ziet hier de uitslag van een vierzijdige piramide  $ABCD.T$  met een rechthoekig grondvlak.

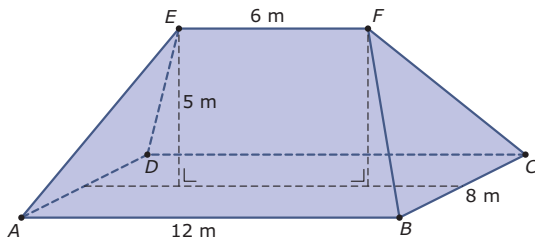
- a Hoe lang zijn de ribben van deze piramide?
- b Hoe hoog wordt deze piramide?



Figuur 10

### Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben  $AE$ ,  $DE$ ,  $BF$  en  $CF$  zijn even lang en  $EF$  loopt evenwijdig met  $AB$  en  $CD$ . Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



Figuur 11

De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel  $m^2$  aan dakbedekking ervoor nodig is.

### Opgave 17: Stolpboerderij

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de figuur.

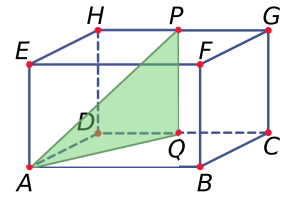
- a Laat zien hoe je de figuur kunt verdelen in een prisma en twee piramides die je kunt samenvoegen tot één vierzijdige piramide. Wordt dit een regelmatige vierzijdige piramide?
- b Bereken de lengtes van de vier opstaande ribben van dit stolpdak.
- c Bereken de drie hoeken van elk van de twee driehoekige dakdelen.
- d Bereken de vier hoeken van elk van de twee trapeziumvormige dakdelen.

## Testen

### Opgave 18

Hier zie je balk  $ABCD.EFGH$  met  $AB = 6$  cm,  $BC = 4$  cm en  $AE = 3$  cm. De punten  $P$  en  $Q$  zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

- Bereken de lengte van  $AP$ .
- Bereken de grootte van  $\angle QAP$  in graden nauwkeurig.
- Bereken de grootte van  $\angle APB$  in graden nauwkeurig.



Figuur 12

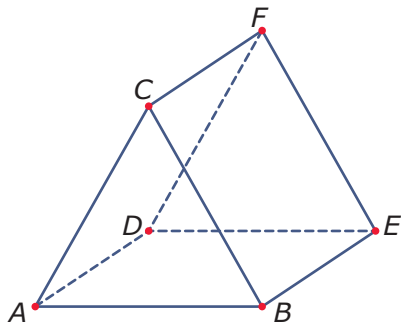
### Opgave 19

De balk uit de vorige opgave past precies in een cilinder met een diameter van 5 cm.

Hoe ziet een uitslag van die cilinder er uit?

---

Werkblad bij Opgave 2 op pagina 2







© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

