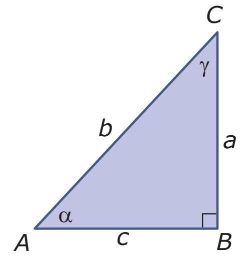
2.5 Rekenen in driehoeken

Inleiding

Je hebt de begrippen sinus, cosinus en tangens tot nu toe leren kennen als componenten van vectoren. Dat blijft ook de belangrijkste toepassing ervan en lat ook zien dat ze zowel positieve als negatieve waarden kunnen hebben. Maar nu ga je ze gebruiken bij berekeningen in (vooral rechthoekige) driehoeken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken voor berekeningen van lengtes en hoeken in (rechthoekige) driehoeken.

Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector;
- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van sinus, cosinus en tangens hoeken en lengtes berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een rechthoekige driehoek. De scherpe hoeken worden weergegeven door de griekse letters α en γ, de zijden zijn gegeven door kleine letters.

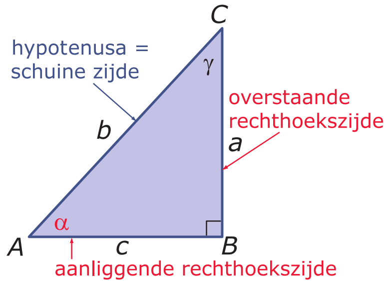
a Leg uit waarom $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$.

b Schrijf vergelijkbare uitdrukkingen op voor $\sin(\gamma)$, $\cos(\gamma)$ en $\tan(\gamma)$.

c De rechte hoek kun je β noemen. Kun je ook de sinus, de cosinus en de tangens van deze hoek opschrijven?

Uitleg

Werk je alleen in rechthoekige driehoeken met sinus, cosinus en tangens, dan kun je je beperken tot scherpe hoeken zoals de hoek α in deze figuur. In deze driehoek geldt: $a = b \cdot \sin(\alpha)$, $c = b \cdot \cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$. En dus is $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$.



Figuur 2

Nu zeg je wel dat a de 'overstaande rechthoekszijde' van α en b de 'aanliggende rechthoekszijde' van α is. En in plaats van hypotenusa zeg je wel 'schuine zijde'. Dan geldt in elke rechthoekige driehoek:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

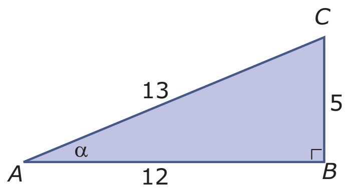
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Je spreekt van de drie 'goniometrische verhoudingen' in een rechthoekige driehoek.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de drie goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek. Gebruik de ΔABC hiernaast.



Figuur 3

a Welke zijde is van hoek α de aanliggende rechthoekszijde? En welke zijde de overstaande rechthoekszijde?

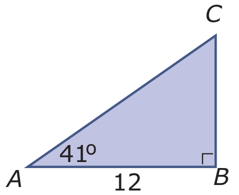
b Schrijf voor hoek α alle drie de goniometrische verhoudingen in getallen op.

c Bereken vanuit elk van deze drie goniometrische verhoudingen de grootte van hoek α. Ga na, dat je drie keer dezelfde uitkomst krijgt.

d Stel dat je ook $\gamma = \angle C$ met behulp van een goniometrische verhouding wilt berekenen. Welke zijde is van deze hoek de aanliggende rechthoekszijde? Bereken de grootte van die hoek met behulp van cosinus.

Opgave 2

In deze driehoek wil je uitrekenen hoe lang BC is.



Figuur 4

a Waarom ga je werken met de tangens van $\angle A$?

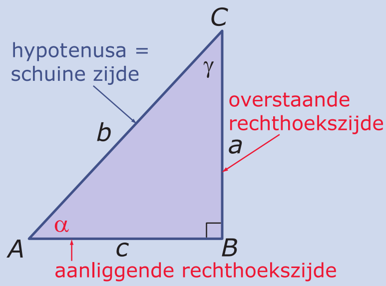
b Schrijf de berekening van de lengte van BC op.

c Je kunt de lengte van BC ook berekenen door gebruik te maken van de tangens van $\angle C$. Laat zien hoe dat gaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet hier een rechthoekige driehoek. De lengtes van de zijden worden met kleine letters aangeduid die corresponderen met de hoofdletters van de hoekpunten er tegenover. De groottes van de hoeken worden met griekse letters aangeduid die corresponderen met de hoekpunten. In dit geval is $\beta = 90°$. In zo'n rechthoekige driehoek geldt:



Figuur 5

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

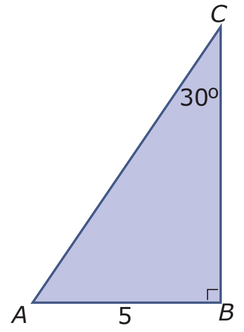
Je spreekt van de drie **goniometrische verhoudingen** in een rechthoekige driehoek. Je gebruikt ze bij berekeningen in driehoeken, ook als die geen rechte hoek hebben. Je spreekt wel van **trigonometrie** (‘driehoeksmeetkunde’).

Voorbeeld 1

Van een rechthoekige driehoek ABC is $AB = 5$ cm, $\angle B = 90°$ en $\angle C = 30°$.
Bereken de lengte van AC.

Antwoord

Maak een schets van de situatie.
Zijde AC is de schuine zijde van de driehoek en zijde AB is de overstaande rechthoekszijde van de gegeven $\angle C$. Je werkt daarom met de sinus van deze hoek.
Je ziet dat $\sin(30°) = \frac{5}{AC}$. Dus $AC = 5/\sin(30°) = 10$.



Figuur 6

Opgave 3

In het **Voorbeeld 1** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek toepast. Je hebt - vanwege de gegevens - met sinus gewerkt.

a Je kunt ook wel snel zien hoe groot $\angle A$ is. Bereken nu met behulp van deze hoek de lengte van AC.

b In het voorbeeld is de lengte van de schuine zijde uitgerekend met behulp van goniometrie. Waarom was dat in dit geval niet nodig?

c Je kunt zijde AB nu uitrekenen met behulp van goniometrie, de stelling van Pythagoras, of door gebruik te maken van de eigenschappen van deze bijzondere driehoek. Laat zien dat je telkens dezelfde waarde vindt.

Opgave 4

Van de rechthoekige driehoek KLM is $\angle K = 90°$, $\angle K = 40°$ en $KM = 7{,}1$ cm.

Bereken de lengte van KL in één decimaal nauwkeurig.

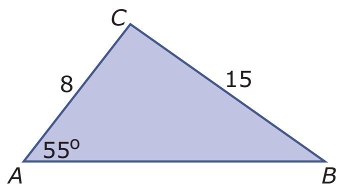
Opgave 5

Van de rechthoekige driehoek PQR is $\angle R = 90°$, $PR = 5$ cm en $PQ = 8$ cm.

Bereken de grootte van $\angle P$ in graden nauwkeurig.

Voorbeeld 2

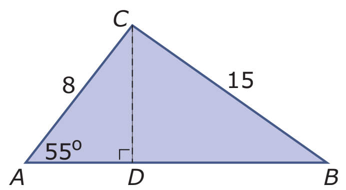
Je ziet hier een niet-rechthoekige driehoek ABC met $AC = 8$ cm, $BC = 15$ cm en $\angle A = 55°$. Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze driehoek, beide in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 7

Antwoord

Omdat de driehoek niet rechthoekig is, kun je zijde AB niet berekenen met de stelling van Pythagoras. Alleen goniometrie toepassen is een optie, maar dan moet je ook een rechte hoek hebben. Dus maak je een rechte hoek door een hoogtelijn te tekenen. De hoogtelijn uit C ligt het meest voor de hand.



Figuur 8

Nu kun je in ΔADC de twee rechthoekszijden berekenen met behulp van goniometrie. Ga na dat $AD \approx 4{,}59$ en $DC \approx 6{,}55$.

Nu kun je in ΔDBC met de stelling van Pythagoras berekenen, dat $DB \approx 13{,}49$.

Nu kun je zelf de omtrek en de oppervlakte van de gegeven driehoek berekenen...

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een niet-rechthoekige driehoek kunt gebruiken.

a Waarom ligt het tekenen van hoogtelijn CD voor de hand?

b Bereken zelf de lengtes van AD en CD. Waarom bereken je die in twee decimalen nauwkeurig?

c Reken ook de lengte van DB na.

d Bereken de omtrek en de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 7

Van driehoek KLM is $\angle K = 34°$, $KM = 16$ cm en $LM = 10$ cm.

Bereken de omtrek in één decimaal en de grootte van $\angle L$ in graden nauwkeurig.

Opgave 8

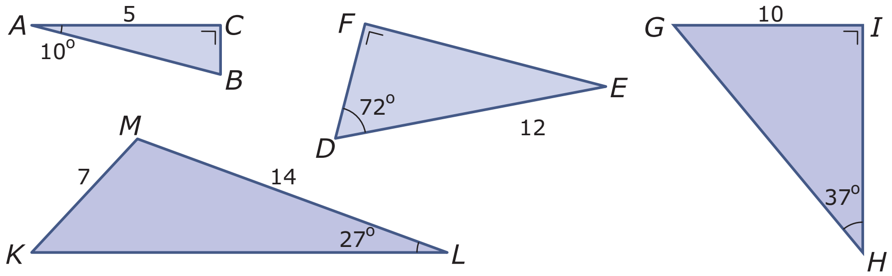
Van een driehoek ABC is $\angle A = 23°$, $\angle C = 46°$ en is $CD = 5$ cm de lengte van de hoogtelijn op zijde AB.

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier vier driehoeken.

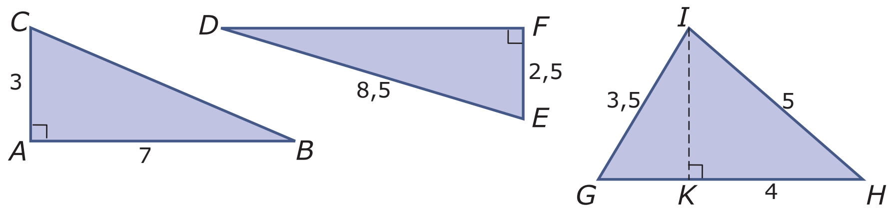


Figuur 9

Bereken alle onbekende zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet hier drie driehoeken.



Figuur 10

Bereken alle onbekende hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Een **tandradtrein** rijdt over een spoorweg met een extra rail in het midden waarin de uitsteeksels van het tandrad van de trein passen. Zo'n trein wordt gebruikt voor steile berghellingen. Een tandradtrein rijdt bijvoorbeeld 1400 m langs een steile helling omhoog en het hoogteverschil is 525 m.

Bereken de hellingshoek van deze tandradbaan.

Opgave 12

De diagonaal van een rechthoek is 16 cm lang. De kleinste hoek tussen de diagonalen is 40°.

Bereken de oppervlakte van deze rechthoek in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

De toren van Pisa staat al jaren scheef. De toren is 82 m lang, maar als je een steen neerlaat aan een touw vanaf het laagste punt van de scheve bovenrand, dan raakt de steen de grond als het touw 80 m lang is.

Hoe groot is dan de hoek die de scheve toren van Pisa met de begane grond maakt?

Figuur 11

Opgave 14

Je ziet hier het SmartCover van een iPad2. Dit SmartCover bedekt de iPad volledig, de afmetingen ervan zijn 18,5 bij 24 cm. Hij bestaat (zoals je ziet) uit vier aaneengesloten banen van 24 cm lengte, die echter niet allemaal even breed zijn. De tweede baan van links is ongeveer 5,6 cm breed en de andere drie zijn 4,3 cm breed.

Als je het SmartCover oprolt zoals in de figuren hieronder is te zien, dan maakt het scherm een hoek met de tafel waar hij op ligt. Neem voor deze opgave aan dat de iPad en de SmartCover geen dikte hebben.

Figuur 12

a Hoe groot is de hellingshoek van de iPad met de tafel?

b Je kunt de driehoekige steun nog verder scharnieren en zo de iPad in de kijkstand zetten. Een strook van 4,3 cm breedte ligt nu op het tafelblad en de tablet leunt tegen een andere strook van 4,3 cm. Welke hoek maakt de iPad nu met het tafelblad? En hoe hoog zit de bovenrand van de iPad nu boven het tafelblad?

Toepassen

Bekijk de applet: regelmatige veelhoeken

Met deze applet maak je regelmatige veelhoeken. Ze passen in een cirkel met straal 1. Je kunt een regelmatige n-hoek opdelen in n gelijke en gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek het middelpunt van de cirkel is waar de andere hoekpunten op liggen.

Met behulp van goniometrie kun je van zo'n driehoek de oppervlakte berekenen. En daarmee bereken je ook de oppervlakte van de veelhoek. En zo kun je zelfs π benaderen...

Opgave 15: Regelmatige vijfhoek

Bekijk de applet in **Toepassen**. Als je $n = 5$ instelt zie je een regelmatige vijfhoek.

a In hoeveel gelijke en gelijkbenige driehoeken kun je deze figuur opdelen?

b Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek?

c Bereken de oppervlakte van zo'n driehoek.

d Hoe groot is de oppervlakte van de vijfhoek?

Opgave 16: Regelmatige zeshoek, achthoek, ...

Bekijk de applet in **Toepassen**. Als je $n = 6$ instelt zie je een regelmatige zeshoek.

a Bereken op dezelfde manier als in de voorgaande opgave de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Neem nu $n = 8$.

b Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek.

Neem nu $n = 10$.

c Bereken de oppervlakte van de regelmatige tienhoek.

Neem nu $n = 100$.

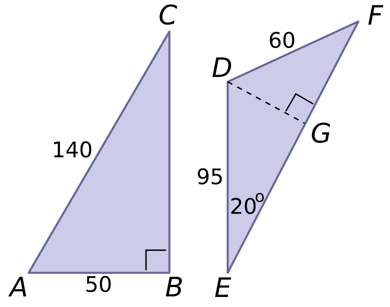
d Bereken de oppervlakte van de regelmatige honderdhoek.

e Als je n steeds kon blijven vergroten, welk getal ga je dan steeds meer benaderen?

Testen

Opgave 17

Bereken van deze twee driehoeken de lengtes van alle zijden in één decimaal en alle hoeken in tienden van graden nauwkeurig.



Figuur 13

Opgave 18

Op de Westerschelde drijven boeien om de vaarroutes voor schepen aan te geven. Zo'n boei is verankerd in de zeebodem aan een ankerplaat met een ketting die 20 m lang is. Door de stroming van het zeewater bij eb en vloed verandert de plaats van de boei. Als het vloed wordt, verplaatst de boei zich naar rechts in de richting van de vloedstroom. Bij vloed maakt de ketting een hoek van 70° met de zeebodem.

a Hoeveel m naar rechts ligt de boei dan t.o.v. de ankerplaat? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Als het eb is ligt de boei 12,5 m naar links t.o.v. de ankerplaat. Hoeveel m is de waterspiegel dan gedaald?

c Bij springvloed is de waterspiegel nog 1 m hoger dan bij vloed. Hoe groot is dan de hoek tussen de ketting en de zeebodem?

Email: f.spijkers@math4all.nl