2.4 Helling en tangens

Inleiding

Dit is een foto van de Dom van Utrecht. De toren is 111 m hoog.

Hoe zou je die hoogte kunnen berekenen als je ervoor op de begane grond staat en alleen je geodriehoek en een rekenmachine bij je hebt?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van tangens berekeningen uitvoeren van lengtes en hoeken.

Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector;
- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

Verkennen

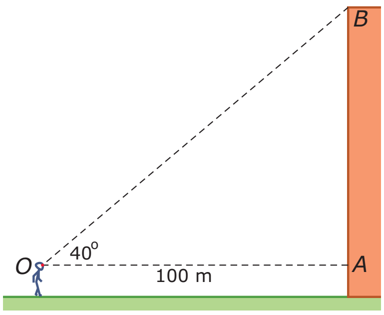
Opgave V1

Jan en Pim zijn het oneens over de hoogte van een nieuw flatgebouw in Nijmegen. Volgens Jan is de flat hoger dan de Dom van Utrecht, maar Pim denkt van niet. Volgens hem is het gebouw lager dan de 111 m van de Dom in Utrecht. Ze besluiten de hoogte van de flat te berekenen.

Hoe kunnen ze dat doen?

Uitleg

Hiernaast zie je hoe Jan de hoogte van een flatgebouw berekent. Hij gaat 100 m van een verticale gevel van de flat staan en meet de hoek waaronder hij de top van die gevel ziet. Dat is de hoek tussen een horizontale lijn (hier de centrale richting) en de kijklijn vanuit zijn oog naar de top van de gevel. Zo'n hoek met de centrale richting heet een 'hellingshoek'. Jan meet een hellingshoek van 40°.



Figuur 2

Met deze gegevens en je kennis van goniometrie kun je nu de hoogte van de flat berekenen. Maar dat is nogal wat werk. Je kunt beter gebruik maken van het begrip helling: de helling van een vector is de verhouding van zijn twee componenten, het is de zijwaartse component gedeeld door de centrale component. Hiervoor is het woord 'tangens' ingevoerd. Die tangens hangt af van de grootte van de hellingshoek. In dit geval geldt:

$\tan(40°) = \frac{AB}{100}$

Je rekenmachine kan ook de tangens van een hellingshoek berekenen. Je vindt dan $\frac{AB}{100} \approx 0{,}839$ en dus $AB \approx 83{,}9$ m. Als Jan z'n ogen op 1,80 m van de grond heeft, dan is de flat 85,7 m hoog.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de berekening van de hoogte van het flatgebouw.

a Je kunt de berekening uitvoeren door alleen met cosinus en sinus (of de stelling van Pythagoras) te werken. Laat zien, hoe dat gaat.

b Voer nu zelf de berekening van de hoogte met behulp van de tangens van de hellingshoek uit.

c Wat gebeurt er met de hellingshoek als de zijwaartse component groter wordt en de centrale component niet?

d Wat betekent het als een helling 10% is?

Opgave 2

Een landmeter staat 50 m van een cilindervormige koeltoren af en meet de hellingshoek naar de top. Hij vindt 31°. Zijn hoekmeter staat op een statief en zit 1,50 m boven de grond.

Bereken de hoogte van deze koeltoren.

Opgave 3

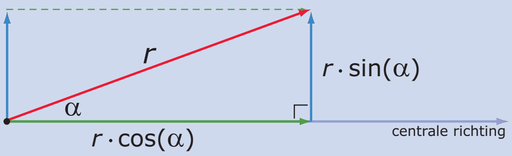
Een weerballon wordt geobserveerd vanuit een punt dat 800 m verwijderd is van de plaats waar hij wordt losgelaten. De ballon stijgt loodrecht op en in 1 minuut wordt de hellingshoek naar die ballon van 38° groter tot 45°.

Hoeveel is de ballon in die minuut gestegen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De hoek α die een vector met zijn centrale richting maakt heet de **hellingshoek** van die vector. De bijbehorende **helling** wordt bepaald door de verhouding van de zijwaartse component en de centrale component van die vector. Voor die helling wordt het woord **tangens** gebruikt.



Figuur 3

Voor een vector met lengte r en hellingshoek α betekent dit dat de helling $\tan(\alpha) = \frac{r \cdot \sin(\alpha)}{r \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ is.
Omdat je rekenmachine de sinus en de cosinus van een hoek kan uitrekenen, kan hij ook de tangens van een hoek uitrekenen.

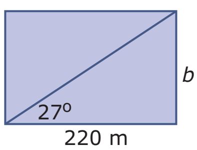
Soms wordt een helling (een tangens dus) als **hellingspercentage** weergegeven. Dan is de waarde van de tangens met 100 vermenigvuldigd.

Voorbeeld 1

Een rechthoekig veld is 220 m lang. De hoek tussen de langste zijde en de diagonaal is 27°. Bereken de breedte van het veld.

Antwoord

Maak een schets van de situatie.
Je ziet dat $\tan(27°) = \frac{b}{220}$. Dus $b = 220 \cdot \tan(27°) \approx 112$ m.



Figuur 4

Opgave 4

Van een rechthoek met een lengte van 12 cm maakt de diagonaal een hoek van 41° met de langste zijde.

Bereken de omtrek van deze rechthoek in mm nauwkeurig.

Opgave 5

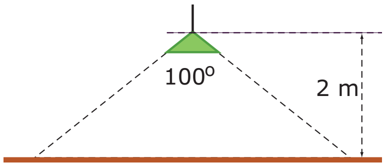
Een boom die 10 m van een huis staat wordt omgehakt. De hellingshoek naar de top van die boom, gemeten vanuit het kelderraam op de begane grond is 44°.

Is het veilig om de boom in de richting van het huis te laten vallen?

Opgave 6

Een lamp hangt 2 m boven de grond en geeft een kegelvormige lichtbundel met een tophoek van 100°.

Bereken de straal van het verlichte gebied.



Figuur 5

Voorbeeld 2

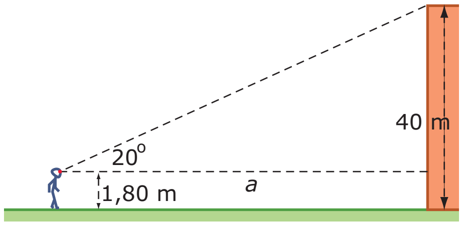
Een schoorsteen van een fabriek is 40 m hoog. Een landmeter meet de hellingshoek naar de top en vindt 20°. De persoon in kwestie gebruikt een hoekmeter die 1,80 m boven de begane grond op een statief zit.
Hoe ver staat dit statief van de schoorsteen af?

Antwoord

Maak een schets van de situatie.

Je ziet dat $\tan(20°) = \frac{38,20}{a}$. Dus $a = 38,20/\tan(20°) \approx 104,95$ m.

Hij staat ongeveer 195 m van de schoorsteen af.



Figuur 6

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** de berekening van de afstand van het statief van de landmeter tot een schoorsteen.

a Leg uit waarom $\tan(20°) = \frac{38,20}{a}$.

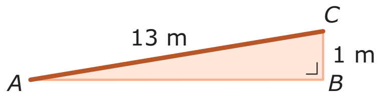
b Waarom volgt uit $\tan(20) = \frac{38,20}{a}$ dat $a = 38,20/\tan(20) \approx 104,95$? Voer zelf de berekening van de afstand uit.

Opgave 8

Hoe lang is de schaduw van een 10 m hoge vlaggenmast als de hoek die de zonnestralen met de grond maken 47° bedraagt?

Voorbeeld 3

Je ziet hier een oprit naar een huis van 13 m lengte die een hoogteverschil van 1 m overbrugt.
Hoeveel bedraagt het hellingspercentage van deze oprit? En hoe groot is de hellingshoek?



Figuur 7

Antwoord

Met de stelling van Pythagoras vind je $AB = \sqrt{168} \approx 12{,}96$ m.
De helling is dus $1/12{,}96 \approx 0{,}077$ en dat geeft een hellingspercentage van ongeveer 7,7%.

Omdat de helling van een vector gelijk is aan de tangens van de hellingshoek α, geldt $\tan(\alpha) \approx 0{,}077$.
Dit geeft met je rekenmachine $\alpha \approx 4{,}4°$.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de berekening van het hellingspercentage en de hellingshoek van een oprit.

a Laat zien dat $AB = \sqrt{168} \approx 12{,}96$.

b Hoe wordt het hellingspercentage berekend?

c Bereken zelf de hellingshoek.

Opgave 10

Dit verkeersbord geeft aan dat de weg waarbij het staat een hellingspercentage van (gemiddeld) 10% heeft.

a Welke hellingshoek hoort er bij zo'n hellingspercentage?

b Als je 3 km op deze weg hebt gereden, hoeveel m ben je dan (gemiddeld) gestegen?

c Als je 100 m bent gestegen op deze weg, hoeveel m heb je dan hemelsbreed ongeveer afgelegd?

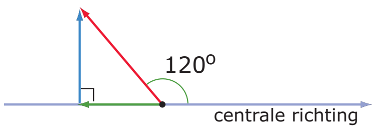
Figuur 8

Opgave 11

Hier zie je een vector met een ‘hellingshoek’ van 120°.

a Waarom is $\tan(120)$ een negatief getal?

b Als de zijwaartse component van deze vector 5 is, hoeveel bedraagt dan de centrale component?

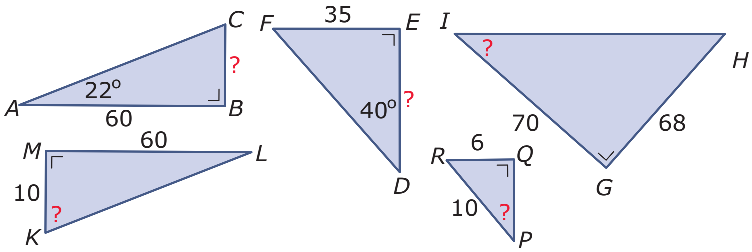


Figuur 9

Verwerken

Opgave 12

Je ziet hier vijf rechthoekige driehoeken.



Figuur 10

Bereken telkens de zijde of de hoek waar een vraagteken bij staat. Geef de zijden in één decimaal en de hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Een lange ladder staat tegen een muur. De voet van de ladder is 1,50 m van de muur en hij maakt een hoek van 72° met de begane grond.

Hoe hoog ligt het punt waar de ladder de muur raakt boven de grond? Hoe lang is de ladder?

Opgave 14

Een vuurtorenwachter zit boven in zijn vuurtoren 40 m boven de zeespiegel. Hij ziet twee schepen die zich met de vuurtoren precies in één vlak bevinden. De man ziet deze boten onder hellingshoeken van 22° en 16°.

Bereken de afstand tussen beide schepen.

Opgave 15

Tegen een berghelling met een hellingspercentage van 123% zit een steile trap.

a Bereken de hellingshoek van deze berghelling.

b Hoe lang is deze trap als het hoogste punt 80 m boven het laagste punt zit?

Opgave 16

Op het hoekpunt A van een vierkant plein $ABCD$ staat een toren die 60 m hoog is. De zijde van het plein is 150 m lang. De top van de toren is T.

a Bereken de hoek die lijn TB maakt met de zijde AB.

b Bereken de hoek die lijn TC maakt met de diagonaal AC.

Opgave 17

Van een vierzijdige piramide is het grondvlak rechthoek $ABCD$ is met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm. De top T van deze piramide ligt recht boven het snijpunt S van de diagonalen van het grondvlak. $TS = 12$ cm.

a Bereken $\angle SAT$.

b Bereken $\angle BAT$.

Toepassen

Bekijk de applet: hellingshoek van een lijn

Ook rechte lijnen hebben een helling. Bij een hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) kun je een **hellingshoek van een rechte lijn** berekenen. Zo'n hellingshoek heeft alleen betekenis als op beide assen de schaalverdeling hetzelfde is.

In de applet kun je zien dat de tangens van de richtingshoek α gelijk is aan het hellingsgetal van de lijn.

Hellingsgetallen kunnen ook negatief zijn. Hoe zit het dan met hellingshoeken?
De afspraak is dat bij positieve hellingsgetallen positieve hellingshoeken horen. Je draait dan de lijn om het snijpunt met de y-as van de positieve x-richting naar de positieve y-richting, in de positieve richting. Bij negatieve hellingsgetallen horen negatieve hellingshoeken, want nu draai je de lijn van de positieve x-richting naar de negatieve y-richting, in de negatieve richting.

Opgave 18: Hellingshoeken van lijnen

Bekijk de applet in **Toepassen**. Daarin zie je van een lijn zowel het hellingsgetal a als de hellingshoek α.

a Ga voor een aantal waarden van a na, dat $\tan(\alpha) = a$.

b Leg uit waarom $\tan(\alpha) = a$.

c Bereken de hellingshoek van de lijn $y = 2x + 1$.

d Bereken de hellingshoek van de lijn $y = -0{,}25x + 3$.

Opgave 19: De hoek tussen twee lijnen

Gegeven zijn de twee lijnen l: $y = 3x + 2$ en m: $y = 0{,}5x + 2$.

a Teken deze lijnen in een assenstelsel met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Meet vervolgens de hoek tussen beide lijnen.

b Bereken de hellingshoek van zowel l als m.

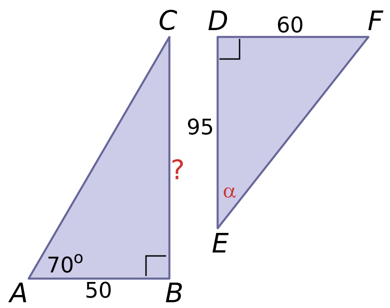
c Hoe bereken je de hoek tussen beide lijnen vanuit hun beider hellingshoeken? Bereken de hoek tussen l en m.

d Bereken de hoek tussen de lijnen l en k: $y = -0{,}5x + 3$.

Testen

Opgave 20

Bereken met behulp van tangens de lengte van BC in één decimaal en hoek α in tienden van graden nauwkeurig.



Figuur 11

Opgave 21

Als nieuwkomer in de Tour de France van 2017 zal de 10,5 km lange Col de la Biche zeker zijn sporen achterlaten. Deze beklimming van de zwaarste categorie begint officieel in Gignez, maar de weg begint al 2 km voor het dorp te stijgen. De eerste 5 km zijn het steilst, met percentages rond 11%.

Neem aan dat de helling die eerste 5 km constant 11% is.
Bereken de bijbehorende hellingshoek en ook hoeveel meter je gedurende die 5 km stijgt.