2.3 Hoeken berekenen

Inleiding

Een opstijgend vliegtuig heeft een snelheidsvector met een duidelijke richting en grootte. De zijwaartse component geeft de snelheid weer waarmee de hoogte verandert. Als je weet hoeveel m het vliegtuig heeft afgelegd en hoe hoog het dan zit, kun je vanuit de zijwaartse component (dus met behulp van de sinus) de hoek berekenen waaronder het vliegtuig opstijgt.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector.

Verkennen

Opgave V1

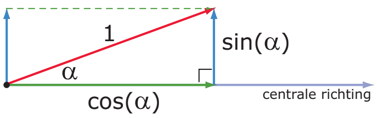
Een vliegtuig stijgt in een rechte lijn op van de begane grond. Als het 3000 meter heeft afgelegd, heeft het een hoogte bereikt van 1000 m boven de begane grond.

Onder welke hoek met de begane grond is het vliegtuig opgestegen?

Figuur 2

Uitleg

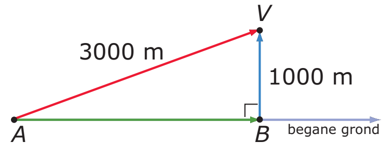
Als de lengte van een vector en zijn hoek met de centrale richting bekend zijn kun je de zijwaartse- of de centrale component berekenen. Maar je kunt omgekeerd de richtingshoek berekenen als de lengte van de vector en de zijwaartse- of de centrale component zijn gegeven. Daarvoor gebruik je sinus of cosinus, de componenten van de eenheidsvector. Met je rekenmachine kun je vanuit sinus en cosinus terugrekenen.



Figuur 3

Hier zie je de situatie van een opstijgend vliegtuig. Als het 3000 m heeft afgelegd, is het 1000 m gestegen. Je kunt nu de hoek die de baan van het vliegtuig met de begane grond maakt berekenen.

In de figuur geldt: $BV = AV \cdot \sin(\alpha)$ of wel $1000 = 3000 \cdot \sin(\alpha)$.
Hieruit volgt $\sin(\alpha) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$.
Met je rekenmachine kun je vanuit sinus terugrekenen. Vaak wordt dat aangeduid als $arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ of (op z'n Amerikaans) als $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx$ 19,47.
Je vindt: $\alpha \approx 19{,}5°$.



Figuur 4

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het verhaal van het opstijgende vliegtuig.

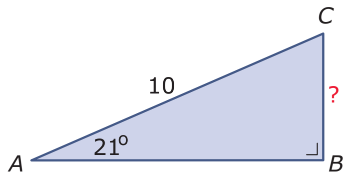
a Waarom wordt bij het berekenen van de hoek sinus gebruikt?

b Bereken de hoek door eerst met de stelling van Pythagoras de centrale component uit te rekenen en dan met cosinus te werken.

Opgave 2

Je ziet hier ΔABC.

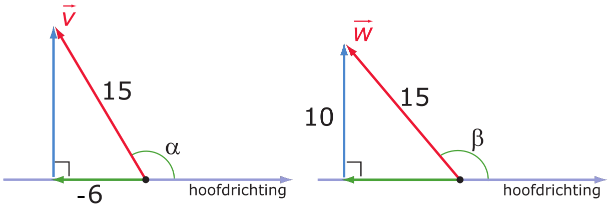
Bereken de grootte van $\angle A$. Doe dit een keer met behulp van sinus en een keer met behulp van cosinus.



Figuur 5

Opgave 3

Je ziet hier twee vectoren waarvan de lengte en de lengte van de centrale component of de zijwaartse component zijn gegeven.



Figuur 6

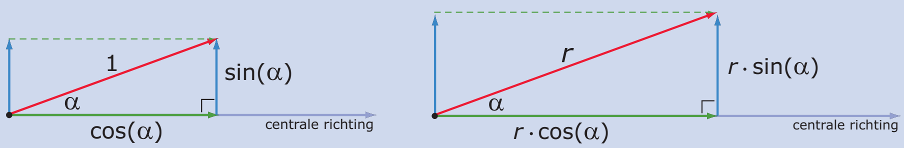
a Waarom geldt voor hoek α dat $15 \cdot \cos(\alpha) = -6$? Bereken hieruit de grootte van deze hoek in graden nauwkeurig.

b Om hoek β te berekenen werk je met de zijwaartse component van vector $\vec{w}$. Laat zien hoe je te werk gaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord **cosinus** gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord **sinus** gebruikt. Ze staan loodrecht op elkaar.



Figuur 7

In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een **eenheidsvector**, een vector met lengte 1. Sinus wordt afgekort tot ‘sin’ en cosinus tot ‘cos’. Om aan te geven dat beide van de **richtingshoek** α

afhangen, zet je dat er tussen haakjes bij. Het rekenen met sinus en cosinus heet **goniometrie** en dat betekent ‘hoekmeetkunde’ (‘gonia’ is grieks voor ‘hoek’).

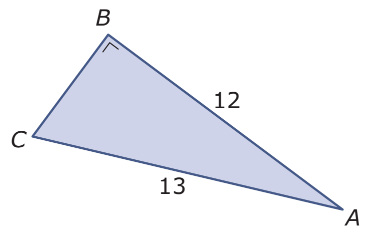
Als je vector de lengte r heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met r vermenigvuldigd. De centrale component is dan $r \cdot \cos(\alpha)$ en de zijwaartse component is $r \cdot \sin(\alpha)$.

Je kunt dit ook gebruiken om de hoek α te berekenen als de lengte van de vector en één van beide componenten is gegeven.

In het **Practicum** zie je een applet waarin je de grootte van de hoek van een eenheidsvector kunt zoeken als de sinus of de cosinus ervan bekend is. Je moet wel goed kijken of je hoek scherp, stomp of zelfs overstrekt is, want er zijn in de applet steeds twee hoeken met dezelfde sinus en ook twee hoeken met dezelfde cosinus.
Ook de rekenmachine kan α berekenen als je $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$ weet. Hij kan terugrekenen vanuit sinus en cosinus. Maar je rekenmachine kan niet zien welke hoek je wilt uitrekenen en geeft dus soms een scherpe hoek terwijl je een stompe hoek wilt hebben. Je kunt echter uit je antwoord wel de goede hoek afleiden.

Voorbeeld 1

Bereken de grootte van hoek C in de figuur hiernaast.



Figuur 8

Antwoord

Vanuit hoekpunt C gezien kun je AC opvatten als vector die een hoek maakt met de centrale component BC. En dan is AB de zijwaartse component. Dus is

$13 \cdot \sin(\angle C) = 12$ en dus $\sin(\angle C) = \frac{12}{13}$.

En hierbij hoort $\angle C \approx 67{,}4°$.
Op je rekenmachine vind je dit (afhankelijk van het merk) door $\sin^{-1}(12/13)$ of $\arcsin(12/13)$ te berekenen.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de grootte van een scherpe hoek van een rechthoekige driehoek kunt berekenen.

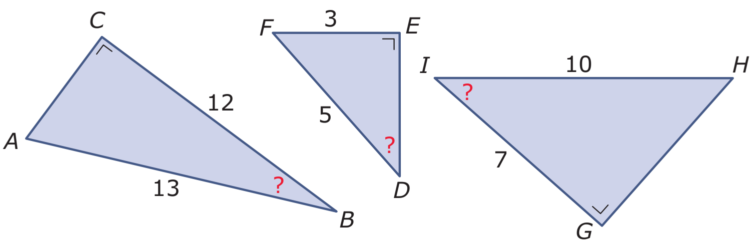
a Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebuik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

b Bereken eerst met de stelling van Pythagoras de lengte van zijde BC. Bereken daarna opnieuw de grootte van hoek C, maar nu met behulp van cosinus.

c Waarom hoef je nu de grootte van $\angle A$ niet meer met goniometrie te berekenen?

Opgave 5

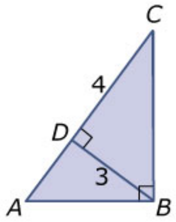
Bereken in deze driehoeken de grootte van de hoeken met het vraagteken in graden nauwkeurig.



Figuur 9

Opgave 6

Bereken in deze driehoek de grootte van $\angle BAD$.



Figuur 10

Voorbeeld 2

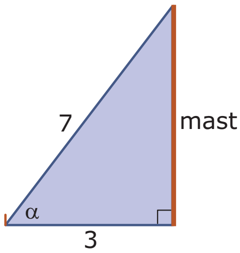
Op 3 meter van de voet van een antennemast worden enkele korte paaltjes de grond in geslagen. Van de top van de mast worden draden van 7 meter gespannen naar de voet van de paaltjes. Bereken de hoogte van de antennemast en de hoek die elke draad met de grond maakt.

Antwoord

Verwerk de gegevens in een tekening zoals hiernaast. Je gaat er van uit dat de antennemast loodrecht op de grond staat.

Je neemt de grond als centrale richting. In de tekening zie je dat de ‘vector’ een lengte van 7 m en een centrale component met een lengte van 3 m heeft. Er geldt dus $7 \cdot \cos(\alpha) = 3$. De grootte van hoek α is ongeveer 65°.

De hoogte van de mast is dan ongeveer $7 \cdot \sin(64{,}6) \approx 6{,}32$ m.



Figuur 11

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de hoek kunt berekenen die een gespannen draad maakt met de grond.

a Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebuik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

b Je kunt ook de antennemast als hoofdrichting nemen. Dan bereken je eerst de hoek β die de draad met de antenne maakt. Ga na dat dit een waarde voor β oplevert die in overeenstemming is met de waarde van α die je eerder hebt gevonden.

c Waarom is voor het berekenen van de hoogte van de antennemast niet de waarde van α in graden nauwkeurig genomen, maar een nauwkeuriger waarde?

d Bereken de hoogte van de antennemast ook met behulp van de stelling van Pythagoras.

Opgave 8

Er wordt een nieuwe antennemast opgericht met een hoogte van 10 m. Deze antennemast wordt loodrecht gehouden door draden vanaf de top te spannen naar punten op de grond. Deze draden moeten een hoek van 50° met de begane grond maken.

Hoe lang worden deze draden? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 9

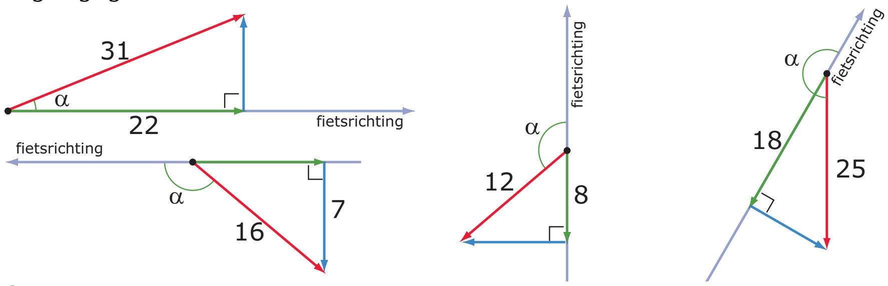
Een vliegtuig ondervindt een windsnelheid van 60 km/uur schuin tegen. De snelheid van het vliegtuig neemt daardoor met 15 km/uur af.

Welke hoek maakt de windrichting met de vliegrichting?

Verwerken

Opgave 10

Hieronder zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend. De componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden zijn ook getekend. Van zowel de vectoren als sommige componenten is de lengte gegeven.



Figuur 12

Bereken de hoek die de windvector met de fietsrichting maakt in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Een trein rijdt 200 m langs een berghelling omhoog. Hij is dan 68 m gestegen.

Hoe groot is de hoek die het spoor met de horizontale richting maakt? Geef het antwoord in graden nauwkeurig.

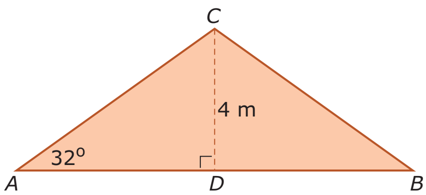
Opgave 12

Iemand bevindt zich in een oude mijngang 40 m lager dan de ingang. Hij loopt terug naar die ingang. De eerste 400 meter loopt hij schuin omhoog onder een hoek van 5°. Het is dan nog 200 meter terug naar de ingang.

Onder welke hoek loopt hij het laatste deel van de terugtocht schuin omhoog? Geef het antwoord in graden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

ΔABC is het vooraanzicht van de bovenkant van een symmetrische gevel. De zijden AC en BC vormen de breedtes van de rechthoekige dakdelen.



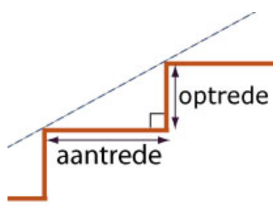
Figuur 13

Bereken de breedte van een dakdeel in cm nauwkeurig.

Opgave 14

Van een zogenaamde 'luie trap' is de optrede 15 cm en de aantrede 30 cm. Zie figuur. Tussen twee verdiepingen van een warenhuis zit een luie trap met 26 treden. De hoekpunten bij de rechte hoeken die aantrede en optrede met elkaar maken liggen op een rechte lijn die een hoek maakt met de vloeren van de verdiepingen.

Bereken die hoek in tienden van graden nauwkeurig.



Figuur 14

Opgave 15

Van een gelijkbenige driehoek zijn de zijden 12, 12 en 10 cm.

Bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Toepassen

Je ziet hier de twee **tekendriehoeken** die je vroeger in veel wiskundelokalen aantrof.
De éne tekendriehoek heeft dezelfde vorm als je geodriehoek, dus hoeken van 45°, 45° en 90°.
De andere geodriehoek is de rechthoekige driehoek die de helft is van een gelijkzijdige driehoek. Deze heeft dus hoeken van 60°, 30° en 90°.

Figuur 15

Opgave 16: Hoeken van 45 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** wordt beschreven.

a Laat zien dat elke geodriehoek zijden van a, a en $a\sqrt{2}$ heeft.

b Bereken de exacte waarde van $\sin(45)$ en van $\cos(45)$.

Opgave 17: Hoeken van 30 graden en 60 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** wordt beschreven.

a Laat zien dat de tekendriehoek die de helft van een gelijkzijdige driehoek is, zijden van a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ heeft.

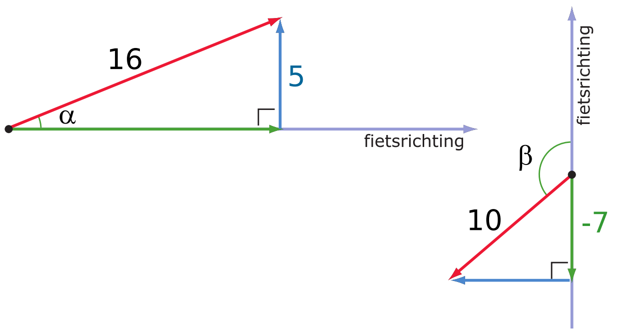
b Bereken de exacte waarde van $\sin(60)$ en van $\cos(60)$.

c Bereken de exacte waarde van $\sin(30)$ en van $\cos(30)$.

Testen

Opgave 18

Hieronder zie je twee windvectoren en de fietsrichting getekend.



Figuur 16

Bereken de hoeken α en β met behulp van sinus en cosinus in tienden van graden nauwkeurig.

Opgave 19

Een toren heeft een lengte van 75 m.
De toren is scheef gezakt. De top van de toren hoort normaal gesproken recht boven het het midden van zijn vierkante grondvlak te liggen. Maar het punt recht onder de top ligt 1,96 m verwijderd van dit midden.

Bereken de hoek die de lijn door het midden van het grondvlak en de top maakt met de grond.

Practicum

De hoek bepalen als sinus of cosinus zijn gegeven: zoek de juiste hoek bij de gegeven sinus of cosinus ervan

Bekijk de applet.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.