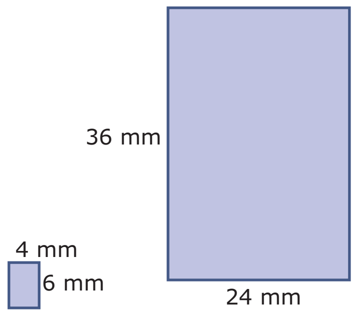
1.5 Vergrotingsfactoren

Inleiding

Je ziet twee gelijkvormige rechthoeken.
De vergrotingsfactor is duidelijk 6, dus de zijden van de grote rechthoek zijn 6 keer die van de kleine rechthoek. Maar is de oppervlakte ook 6 keer zo groot geworden?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip oppervlaktevergrotingsfactor;
- bij vergrotig of verkleining van een figuur de oppervlaktevergrotingsfactor berekenen vanuit de lengtevergrotingsfactor en omgekeerd.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen en zijden berekenen met behulp van de vergrotingsfactor;
- de eigenschappen van middelloodlijnen, zwaartelijnen, bissectrices en en hoogtelijnen in een driehoek;
- de begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel.

Verkennen

Opgave V1

In een assenstelsel is ΔABC gegeven door $A(0,2)$, $B(4,1)$ en $C(2,4)$

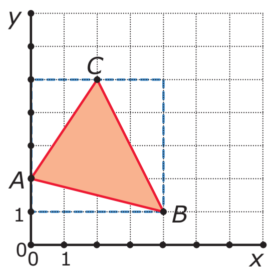
a Bereken de omtrek en de oppervlakte van ΔABC.

Van ΔADE zijn alle zijden 2 keer zo groot.

b Teken ΔADE en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

Van ΔAFG zijn alle zijden 5 keer zo groot.

c Bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.



Figuur 2

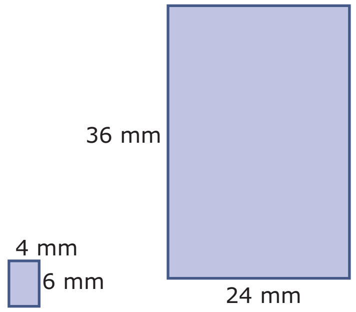
Uitleg

Je ziet hier een kleine rechthoek met zijden van 4 mm en 6 mm. Daarnaast zie je een grotere rechthoek waarvan de zijden 6 keer zo groot zijn.

- De omtrek van de kleine rechthoek is $6 + 4 + 6 + 4 = 24$ mm.
- De omtrek van de grote rechthoek is $36+24+36+24 = 120$ mm.

Dus de omtrek van de grotere rechthoek is 6 zo groot dan die van de kleine rechthoek.
Geldt dit ook voor de oppervlakte van de rechthoeken?

- De oppervlakte van de kleine rechthoek is $6 \cdot 4 = 24$ mm^2.
- De oppervlakte van de grote rechthoek is $36 \cdot 24 = 864$ mm^2.



Figuur 3

Door de vergroting is de oppervlakte $864/24 = 36 = 6^2$ keer zo groot geworden.
En dat is ook logisch: zowel de lengte als de breedte wordt 6 keer zo groot en voor de oppervlakte moet je ze vermenigvuldigen.

De vergrotingsfactor van de lengtes noem je de ‘lengtevergrotingsfactor’. De bijbehorende ‘oppervlaktevergrotingsfactor’ is het kwadraat van de lengtevergrotingsfactor.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat de oppervlakte van een rechthoek 6^2 keer zo groot wordt als alle zijden 6 keer zo groot worden.

a Teken de rechthoek van 24 bij 36 mm en laat zien, dat de rechthoek van 4 bij 6 mm er inderdaad 36 keer op past.

b Stel dat de zijden van de kleine rechthoek met vergrotingsfactor 4 worden vermenigvuldigd. Hoeveel keer zo groot wordt dan de oppervlakte?

c En hoeveel bedraagt de oppervlaktevergrotingsfactor als de lengtevergrotingsfactor 0,5 bedraagt?

De kleine rechthoek wordt vergroot tot zijn oppervlakte 9 keer zo groot is geworden.

d Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor dan?

Opgave 2

Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $AB//CD$. $AB = 10$ cm en $AD = 5$ cm. De hoogte $DE = 4$ cm.

a Teken het parallellogram en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

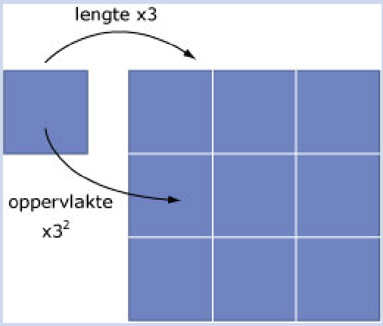
b Het parallellogram wordt verkleind met lengtevergrotingsfactor 0,2. Bereken de oppervlakte en de omtrek van het kleinere trapezium.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Hier zie je wat er gebeurt als je van een vierkant alle zijden 3 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 3 keer zo groot;
- de oppervlakte wordt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ keer zo groot.



Figuur 4

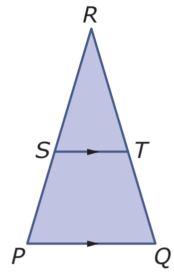
Omdat de oppervlakte van een figuur niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidsvierkanten, geldt dit voor elke figuur. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k:
Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot.
Omdat de vorm van beide figuren bij vergroten hetzelfde blijft heten ze **gelijkvormig**.

Ofwel: is bij twee gelijkvormige figuren de **lengtevergrotingsfactor** k, dan is de **oppervlaktevergrotingsfactor** k^2.

- Als $k > 1$ is er sprake van een vergroting.
- Als $k < 1$ is er sprake van een verkleining.
- Als $k = 1$ verandert er niets.

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur hiernaast. Gegeven is dat $PQ = 8$, $ST = 5$ en $PR = QR = 13$ cm.
Bereken de oppervlakte van ΔSTR.



Figuur 5

Antwoord

De driehoeken PQR en STR zijn gelijkvormig.
De hoogte van driehoek PQR is gelijk aan $\sqrt{153}$, dus de oppervlakte van die driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{153} = 4\sqrt{153}$ cm^2.

ST is $5\Big/8 = \frac{5}{8}$ van PQ, dus de lengtevergrotingsfactor van driehoek PQR naar driehoek STR is $\frac{5}{8}$.

De bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor is $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.

De oppervlakte van ΔSTR is daarom $\frac{25}{64} \cdot 4\sqrt{153} = \frac{25}{16}\sqrt{153}$ cm^2.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

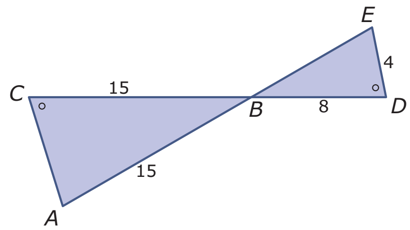
a Waarom is $\Delta PQR \sim \Delta STR$?

b Laat zien dat de hoogte van driehoek PQR gelijk is aan $\sqrt{153}$.

c Loop de berekening van de oppervlakte van ΔSTR zelf na.

Opgave 4

Deze figuur bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken.



Figuur 6

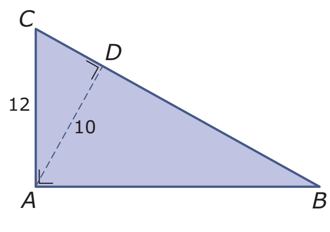
a Laat zien dat deze twee driehoeken gelijkvormig zijn.

b Bereken de totale oppervlakte van deze twee driehoeken samen.

Opgave 5

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met enkele afmetingen erbij.

Bereken de oppervlakte van deze driehoek.



Figuur 7

Voorbeeld 2

De vierhoeken $ABCD$ en $KLMN$ zijn gelijkvormig. De oppervlakte van vierhoek $KLMN$ is gelijk aan 240 cm^2 en de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is gelijk aan 20 cm^2. De omtrek van vierhoek $ABCD$ is gelijk 18 cm.
Bereken de omtrek van vierhoek $KLMN$.

Antwoord

De oppervlaktevergrotingsfactor van vierhoek $ABCD$ naar vierhoek $KLMN$ is 12.

De lengtevergrotingsfactor van vierhoek $ABCD$ naar vierhoek $KLMN$ is daarom $\sqrt{12}$.

De omtrek van vierhoek $KLMN$ is daarom $\sqrt{12} \cdot 18 = 36\sqrt{3}$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom is de oppervlaktevergrotingsfactor 12?

b Waarom is de lengtevergrotingsfactor dan $\sqrt{12}$?

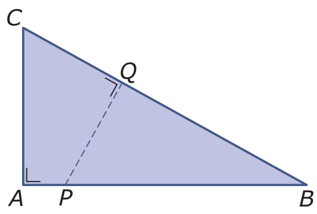
Van een blad papier op A4-formaat is de oppervlakte de helft van een blad papier op A3-formaat. Een blad A4 is 297 mm bij 210 mm.

c Welke afmetingen heeft een blad A3?

Opgave 7

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met $AC = 5$ en $AB = 10$ cm. Lijnstuk PQ staat loodrecht op BC en verdeelt de driehoek is twee stukken met gelijke oppervlaktes.

Bereken de lengte van AP.



Figuur 8

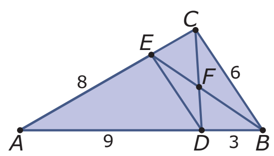
Verwerken

Opgave 8

Je ziet hier ΔABC met enkele afmetingen. De lijnstukken DE en BC zijn evenwijdig.

a Waarom zijn de driehoeken ADE en ABC gelijkvormig? Bepaal ook de lengtevergrotingsfactor van ΔABC naar ΔADE.

b Welke twee gelijkvormige driehoeken zitten er nog meer in deze figuur? Hoe verhouden zich de oppervlaktes van deze twee driehoeken?



Figuur 9

Opgave 9

Marian heeft van een vakantiefoto van 7 cm hoog en 10 cm breed een vergroting laten maken. De vergroting is 24 cm breed.

a Hoe hoog wordt de vergroting? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Op deze foto staat een vuurtoren. Op de vergroting is deze toren 15 cm hoog.

b Hoe hoog is deze toren op de originele vakantiefoto?

Op de originele foto staat een reclamebord met een oppervlakte van 6 cm^2.

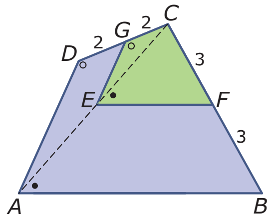
c Welke oppervlakte heeft dit reclamebord op de vergroting? Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de twee vierhoeken $ABCD$ en $EFCG$.

a Waarom zijn deze vierhoeken gelijkvormig?

b Hoe groot is de oppervlaktevergrotingsfactor van de grote vierhoek naar de kleinere?



Figuur 10

Opgave 11

In **Madurodam** is een deel van Nederland op schaal 1 : 25 nagebouwd.

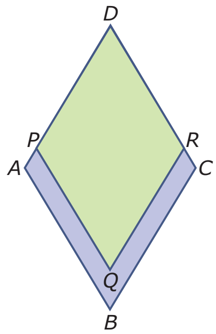
a De Dom in Utrecht is in Madurodam 448 cm hoog. Hoe groot is de toren in werkelijkheid?

b De oppervlakte van Paleistuin Het Loo is 1,1 ha. Hoe groot zou dit dan in Madurodam zijn? (1 ha = 1 hm^2)

Opgave 12

De ruit $ABCD$ heeft zijden van 6 cm en twee hoeken van 60°.
De ruit $PQRD$ is gelijkvormig met $ABCD$ en de oppervlakte van ruit $PQRD$ is $\frac{3}{4}$ van de oppervlakte van ruit $ABCD$.

Bereken de lengte van BQ.

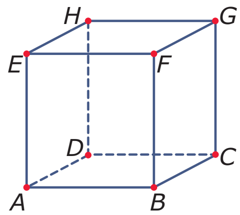


Figuur 11

Toepassen

Met lengtevergroting en oppervlaktevergroting heb je ook in ruimtelijke figuren te maken. Neem bijvoorbeeld deze kubus met ribben van 4 cm. De **oppervlakte** van deze kubus (en van elke ruimtelijke figuur) is de totale oppervlakte van alle grensvlakken samen.
Bij deze kubus is dat de oppervlakte van zes gelijke vierkanten met afmetingen van 4 bij 4 cm.

Als de lengte van de ribben 3 keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte $3^2 = 9$ keer zo groot. Dat kun je eenvoudig zelf nagaan.



Figuur 12

Opgave 13: Kubus vergroten

Je ziet hierboven een kubus met ribben van 4 cm.

a Bereken de oppervlakte van deze kubus.

b Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben 3 keer zo groot zijn ook inderdaad een 9 keer zo grote oppervlakte heeft.

c Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben k keer zo groot zijn ook inderdaad een k^2 keer zo grote oppervlakte heeft.

Opgave 14: Verfblikken

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave ga je uit van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Je houdt geen rekening met de dikte van het blik.

a Bereken de oppervlakte van een verfblik met een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

b Bereken de oppervlakte van een verfblik waarvan zowel de hoogte als de diameter 2 keer zo groot is.

c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de oppervlakte van het blik dan hetzelfde? Licht je antwoord toe.

Figuur 13

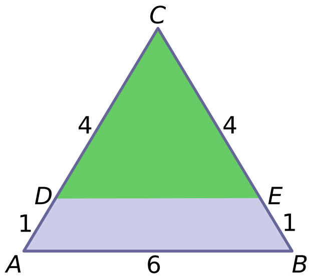
Testen

Opgave 15

In deze figuur is $AB//DE$.

a Bereken de lengte van DE.

b Bereken de oppervlakte van het gedeelte van ΔABC dat niet binnen ΔDEC ligt.



Figuur 14

Opgave 16

In **Miniworld Rotterdam** is veel van Rotterdam nagebouwd op schaal 1 : 87.

a Onder andere is voetbalstadion ‘De Kuip’ nagebouwd. Het veld in De Kuip is 105×68 m. Welke afmetingen zou dit veld in Miniworld Rotterdam moeten hebben?

b Hoeveel van die voetbalveldjes in Miniworld Rotterdam passen er op het veld in De Kuip?

Email: `f.spijkers@math4all.nl`