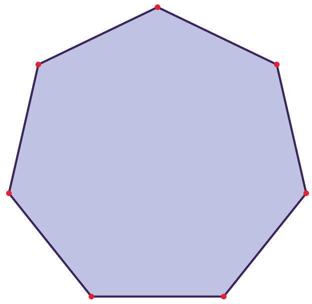
1.4 Vlakke figuren

Inleiding

Dit is een regelmatige zevenhoek. Dat betekent dat alle hoeken gelijk zijn en alle zijden ook.

Als de zijden 2 cm zijn, hoe teken je dan zo'n regelmatige zevenhoek?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip regelmatige veelhoek;
- de hoeken van een regelmatige veelhoek berekenen en regelmatige veelhoeken construeren;
- meetkundige problemen oplossen.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen en zijden berekenen met behulp van de vergrotingsfactor;
- de eigenschappen van middelloodlijnen, zwaartelijnen, bissectrices en en hoogtelijnen in een driehoek;
- de begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel.

Verkennen

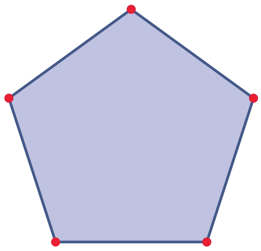
Opgave V1

Hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek. In zo’n vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken even groot.

a Verdeel de vijfhoek in gedachten in drie driehoeken. Hoeveel graden zijn de hoeken van vijfhoek samen? Hoeveel graden is daarom elke hoek van deze regelmatige vijfhoek?

b Hoe teken je een regelmatige vijfhoek?

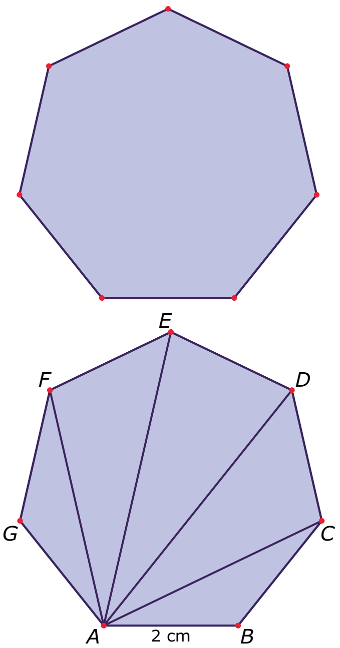
c Teken een regelmatige vijfhoek met zijn omgeschreven cirkel, een cirkel die door alle hoekpunten gaat.



Figuur 2

Uitleg

Je ziet hier een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm. Alle hoeken en alle zijden zijn gelijk. Om zo'n figuur te kunnen tekenen verdeel je hem vanuit één hoekpunt in driehoeken. Omdat hij uit vijf driehoeken bestaat is zijn totale hoekensom $5 \cdot 180 = 900°$. Elke hoek is dan $900/7 \approx 128{,}6°$.
Nu kun je de regelmatige zevenhoek tekenen. Je weet immers alle hoeken en alle zijden, dus de figuur ligt vast.



Figuur 3

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt verteld hoe je een regelmatige zevenhoek kunt tekenen.

a Teken een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.

b Geldt de hoekensom van 900° ook voor niet-regelmatige zevenhoeken? Licht je antwoord toe.

Als van een driehoek de drie zijden gelijk zijn, dan geldt dit ook voor de hoeken.

c Als van een zevenhoek alle zijden gelijk zijn, geldt dit dan automatisch ook voor de hoeken?

Door de hoekpunten van een regelmatige zevenhoek gaat een cirkel.

d Hoe kun je die omgeschreven cirkel tekenen?

Opgave 2

Van een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ zijn alle zijden 4 cm.

a Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige zeshoek?

b Teken deze regelmatige zeshoek.

c Teken de omgeschreven cirkel van deze zeshoek.

d Bij een regelmatige zeshoek is de straal van de omgeschreven cirkel gelijk aan de lengte van een zijde. Leg uit waarom dit zo is.

Opgave 3

Van een vierhoek $ABCD$ zijn alle zijden 4 cm.

a Hoe noem je zo'n vierhoek? Kun je hem tekenen?

b Neem $\angle A = 60°$. Kun je nu de vierhoek tekenen?

c Is dit een regelmatige vierhoek?

d Heeft deze vierhoek een omgeschreven cirkel?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Figuur 4

Alleen driehoeken zijn **star**: als de lengtes van de drie zijden bekend zijn, ligt de vorm van de driehoek vast. Hij is dan niet meer te vervormen. (Daarom worden in constructies die hun vorm moeten behouden altijd driehoeken gebruikt.) Elke driehoek heeft een omgeschreven cirkel en een ingeschreven cirkel.
Als van een driehoek alle zijden gelijk zijn, zijn de hoeken dat automatisch ook, alle drie 60°.

Voor vierhoeken, vijfhoeken, etc., geldt dit niet.
Om die te kunnen tekenen heb je gegevens nodig over zowel hun zijden als hun hoeken. Zelfs als alle zijden gelijk zijn, hoeft dit nog niet voor de hoeken te gelden. Alleen de **regelmatige veelhoeken** vormen hierop een uitzondering, daarvan zijn zowel de hoeken als de zijden gelijk.

De hoekensom van elke n-hoek is $(n-2) \cdot 180°$.

Dat komt omdat hij in $n-2$ driehoeken is op te delen.

Veelhoeken hebben in het algemeen geen omgeschreven cirkel (en ook geen ingeschreven cirkel). Alleen driehoeken en regelmatige veelhoeken hebben wel van dergelijke cirkels.
Een **omgeschreven cirkel** teken je door de middelloodlijnen van de zijden van de figuur met elkaar te snijden. Als alle middelloodlijnen precies één snijpunt hebben is dit snijpunt is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

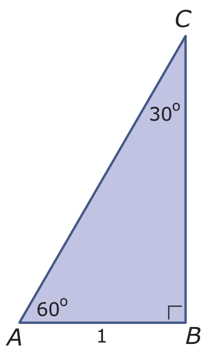
Voorbeeld 1

Je ziet hier ΔABC met $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ en $AB = 1$ cm.
Laat zien, dat $AC = 2$ en $BC = \sqrt{3}$ cm.

Antwoord

Als je deze driehoek spiegelt in lijn BC zie je dat hij de linkerhelft van een gelijkzijdige driehoek ADC is. Daarvan is $AD = 2 \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2$ cm.

Dit betekent dat ook $AC = 2$ cm.
En dan kun je met behulp van de stelling van Pythagoras berekenen dat $BC = \sqrt{3}$ cm.



Figuur 5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Een rechthoekige driehoek met hoeken van 60° en 30° blijkt een bijzondere driehoek te zijn. Als je één zijde weet, kun je de andere twee berekenen.

a Laat zien, dat $BC = \sqrt{3}$ cm.

b Teken de omgeschreven cirkel van deze driehoek en bereken de straal ervan.

c Teken in deze driehoek hoogtelijn BD en bereken de lengte ervan.

Opgave 5

Een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken met zijden van 2 cm die allemaal het hoekpunt M gemeen hebben. Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

a Teken deze zeshoek.

b Laat zien dat deze zeshoek bestaat uit twaalf driehoeken zoals die in **Voorbeeld 1**. Bereken daarmee de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Vierhoek met omgeschreven cirkel

Van vierhoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 4$ en $\angle B = 90°$.
Laat zien dat er meerdere vierhoeken mogelijk zijn, maar dat maar één van die vierhoeken een omgeschreven cirkel heeft.

Antwoord

Teken een paar van deze vierhoeken. Begin met de zijden AB en BC die loodrecht op elkaar staan. Punt D ligt op een cirkel met straal 4 cm en middelpunt A. Waar het punt op die cirkel ligt kun je zelf nog bepalen.
Teken nu de omgeschreven cirkel met behulp van de middelloodlijnen van AB en BC. Er zijn twee punten waar de omgeschreven cirkel en de cirkel waar punt D op ligt elkaar snijden. Slechts één van die punten levert een vierhoek $ABCD$ op met een omgeschreven cirkel.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf enkele mogelijke vierhoeken $ABCD$ zoals in het voorbeeld beschreven.

b Teken de vierhoek die een omgeschreven cirkel heeft en aan de beschrijving voldoet.

c Neem aan dat de vierhoek geen omgeschreven cirkel heeft. Hoe groot is dan de kortste lengte die CD kan hebben?

Opgave 7

Van een gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn de zijden AB en DC evenwijdig, $AD = BC$ en $AB \neq DC$. Gegeven is verder $\angle A = 60°$, $AB = 6$ cm en $AD = 4$ cm.

a Construeer dit trapezium.

b Bereken de lengte van DC.

c Bereken de hoogte en de oppervlakte van dit trapezium.

d In dit trapezium kun je de diagonalen AC en BD tekenen. Deze diagonalen snijden elkaar in punt S. Bereken de lengte van BS.

Verwerken

Opgave 8

Een regelmatige twaalfhoek heeft zijden met een lengte van 2 cm.

a Bereken de grootte van de hoeken van deze twaalhoek.

b Teken deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.

c Teken de omgeschreven cirkel van deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.

Opgave 9

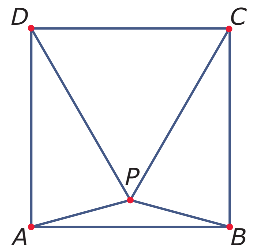
Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek.

Opgave 10

Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met daarin een gelijkzijdige driehoek PCD.

Bereken de grootte van $\angle APB$.
(Denk er aan dat ook $PC = BC$.)



Figuur 6

Opgave 11

Een vlieger is een vierhoek waarvan één van de diagonalen de symmetrieas is. Van vlieger $ABCD$ is dat de diagonaal AC. De andere diagonaal staat loodrecht op AC. Uit de symmetrie volgt $AB = AD$ en $BC = DC$.

a Kun je vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$ en $BC = 4$ cm?

b Teken vlieger $ABCD$ als je weet dat $AB = 6$, $BC = 4$ cm en $\angle DAB = 60°$.

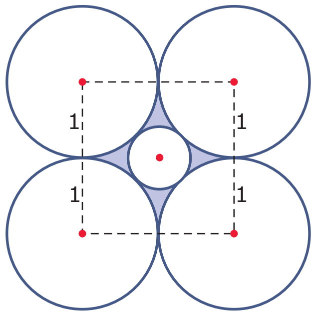
c Bereken de lengte van diagonaal AC.

d Heeft deze vlieger een omgeschreven cirkel? Waarom wel/niet?

Opgave 12

Op de hoekpunten van een vierkant met zijden van 2 cm liggen cirkels met een straal van 1 cm. Binnen deze cirkels ligt midden op het vierkant een kleinere cirkel die met elk van die cirkel precies één punt gemeen heeft.

Bereken de straal van die kleinere cirkel.

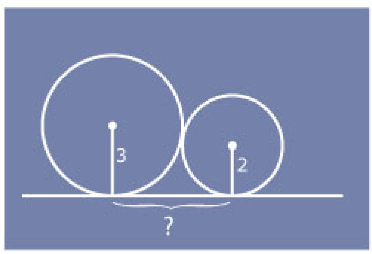


Figuur 7

Toepassen

Een **sangaku** () is een Japanse 'wiskunde-plank', waarop een meetkundige stelling is uitbeeld.
De originelen dateren uit de Edo-periode (1603 - 1867) toen Japan in volledig isolement leefde ten opzichte van de Westerse wereld. Ze werden gemaakt door geleerden uit alle lagen van de bevolking. Ze zijn te vinden in oude Shinto-heiligdommen en soms in Boeddhistische tempels waarin ze werden opgehangen uit dankbaarheid voor het vinden van de stelling. Maar meestal werd het bewijs van de stelling achterwege gelaten als uitdaging voor andere meetkundigen.
Ook nu kun je ze nog als uitdaging, als puzzel opvatten...

Kun je deze oplossen?



Figuur 8

Opgave 13: Sangaku

Je ziet hierboven een zogenaamde ‘sangaku’. Een mooie puzzel om op te lossen.

Los deze puzzel op.

Testen

Opgave 14

In een gelijkzijdige ΔABC zijn alle zijden 4 cm.

Een cirkel met middelpunt C heeft precies één punt gemeen met zijde AB.

a Hoe groot is de straal van deze cirkel?

b Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de driehoek dat niet binnen de cirkel ligt.

Opgave 15

Teken een regelmatige negenhoek met zijden van 2 cm met zijn omgeschreven cirkel.