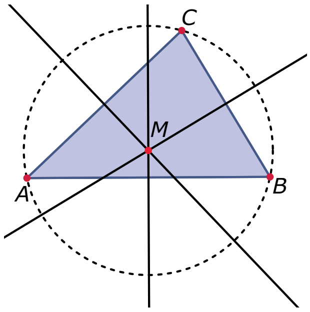
1.3 Bijzondere lijnen

Inleiding

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

Wat zijn middelloodlijnen eigenlijk precies en gaan ze altijd door één punt?

En zijn er nog andere bijzondere lijnen in driehoeken te tekenen?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een middelloodlijn, wat een zwaartelijn, wat een deellijn en wat een hoogtelijn in een driehoek is;
- de eigenschappen van deze soorten lijnen herkennen;
- de ingeschreven en de omgeschreven cirkel van een driehoek construeren.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

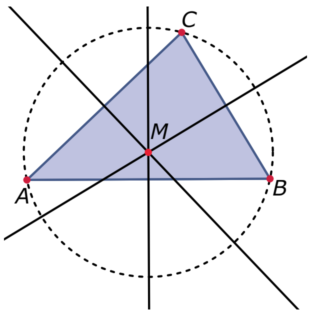
Bekijk de applet: middelloodlijnen

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

a Wat is een middelloodlijn eigenlijk precies?

b Het lijkt er op dat deze middelloodlijnen door één punt gaan. Teken zelf een driehoek met de drie middelloodlijnen en ga na dat ze alle drie door één punt gaan.

c De getekende cirkel heet de omgeschreven cirkel van deze driehoek. Teken zo'n cirkel in jouw driehoek.



Figuur 2

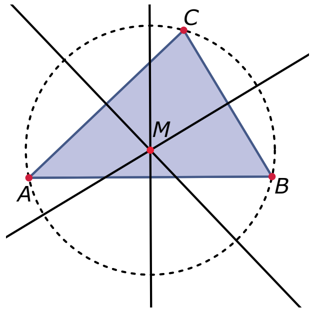
Uitleg

Bekijk de applet: middelloodlijnen

Een ‘middelloodlijn’ van een lijnstuk is een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat, dus de symmetrieas van dat lijnstuk.

Je ziet hier ΔABC met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden getekend. Die drie lijnen gaan door één punt M. Dit punt M is het middelpunt te zijn van een cirkel door de drie hoekpunten van die driehoek. Deze cirkel heet de ‘omgeschreven cirkel’ van de driehoek.

Er zijn nog meer bijzondere lijnen in een driehoek...



Figuur 3

Opgave 1

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeeld.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.

b Gaan de drie deellijnen door één punt D?

c Je kunt een cirkel tekenen die precies binnen de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 2

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de drie zwaartelijnen CP, AQ en BR van de driehoek.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt Z?

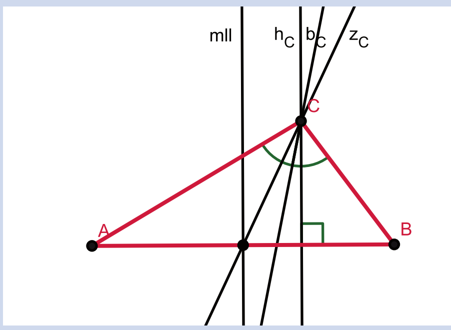
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: lijnen in een driehoek

In veel vlakke figuren kun je bijzondere lijnen tekenen. Je ziet hier in ΔABC:

- de **middelloodlijn** van zijde AB, dat is een lijn die deze zijde loodrecht middendoor deelt;
- de **deellijn** of **bissectrice** van $\angle C$, dat is een lijn die deze hoek middendoor deelt;
- de **zwaartelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt naar het midden van de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C);
- de **hoogtelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt loodrecht op de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C).



Figuur 4

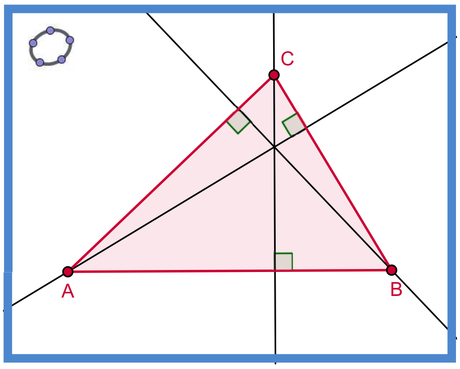
De bijzondere lijnen van een driehoek hebben bepaalde eigenschappen. Je kunt uitspraken doen als "De drie middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt en dat punt is het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van de driehoek". Die cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.
Elke driehoek heeft ook een **ingeschreven cirkel**. Dat is de grootste cirkel die nog precies binnen de driehoek ligt.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: hoogtelijnen

Je ziet hier ΔABC met daarin de drie hoogtelijnen.

Ook die drie hoogtelijnen gaan door één punt, zelfs als twee hoogtelijnen niet binnen de driehoek vallen.



Figuur 5

Opgave 3

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1**.

a Teken zelf een driehoek met drie scherpe hoeken.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Opgave 4

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1**.

a Teken zelf een driehoek met één stompe hoek.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen. Je moet daartoe twee zijden verlengen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Opgave 5

In elke driehoek ABC gaan de drie bissectrices door één punt.

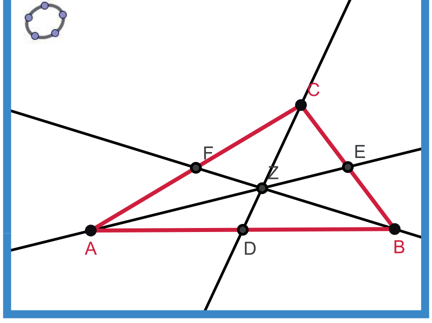
Teken de ingeschreven cirkel van een ΔABC.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: zwaartelijnen

Je ziet hiernaast ΔABC waarin de drie zwaartelijnen zijn getekend. Deze lijnstukken verbinden een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde. Hun snijpunt is het zwaartepunt Z van de driehoek. Een opvallende eigenschap van het zwaartepunt is dat dit punt de zwaartelijnen in twee stukken verdeeld die de verhouding $2:1$ hebben.

Laat dit zien met behulp van gelijkvormigheid.



Figuur 6

Antwoord

Teken lijnstuk EF.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FEC volgt $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.
En daarom is $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$. Bij de overeenkomstige zijden past dus een verhoudingstabel:

AB	BZ	AZ
EF	FZ	EZ

Tabel 1

De vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ bedraagt $\frac{1}{2}$, dus $EZ = \frac{1}{2} \cdot AZ$ en $FZ = \frac{1}{2} \cdot BZ$. En dus is $AZ : EZ = BZ : FZ = 2 : 1$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf ΔABC met de zwaartelijnen AE en BF en teken lijnstuk EF.
Waarom zijn de driehoeken ABC en FEC gelijkvormig?

b Leg uit, dat dit betekent dat $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.

c Leg uit, dat uit het voorgaande volgt dat $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$.

d Hoe kom je aan de vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ?

Opgave 7

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als $2 : 1$ kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z.
Bereken de lengte van lijnstuk AZ.

Verwerken

Opgave 8

Teken een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = AC$.

a Teken de hoogtelijn AD.

b Welke twee congruente driehoeken vind je nu in je figuur?

c Waarom volgt uit die congruentie dat AD ook deellijn van $\angle A$ is? En ook dat AD ook zwaartelijn en middelloodlijn is?

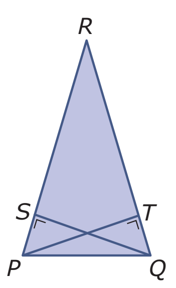
Opgave 9

Je ziet hier een gelijkbenige driehoek PQR met de hoogtelijnen PT en QS. Verder is $PQ = 4$ en $PR = QR = 8$ cm.

a Teken deze driehoek en teken er de derde hoogtelijn RU bij in.

b Waarom is $\Delta PQS \sim \Delta PRU$?

c Bereken de lengte van alle drie de hoogtelijnen.



Figuur 7

Opgave 10

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Teken van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel.

Opgave 11

In een rechthoekige driehoek PQR is $\angle Q = 90°$, $PQ = 24$. Verder is de zwaartelijn $PT = 26$ cm. De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z.

a Maak een schets van de situatie.

b Bereken de lengte van QR en UR.

c Bereken de lengte van lijnstuk UZ.

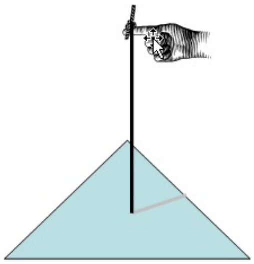
Opgave 12

Teken drie punten die niet op één lijn liggen.

Teken de cirkel waar al deze drie punten op liggen. (Bedenk hoe je de omgeschreven cirkel van een driehoek tekent.)

Toepassen

Het woord ‘zwaartelijn’ heeft alles te maken met de **zwaartekracht**. Neem maar eens een hele grote driehoek en een touwtje met een gewicht er aan. Houd die driehoek en het touwtje in één punt van die driehoek losjes vast. De zwaartekracht laat dan het touwtje loodrecht naar beneden hangen. Dit touwtje verdeelt de driehoek in twee even zware delen, dus (als de driehoek overal even dik is) in twee delen met dezelfde oppervlakte. Je kunt op de driehoek een lijn tekenen die precies onder het touwtje ligt, dat is een zwaartelijn van de driehoek.



Figuur 8

Doe dit met de drie hoekpunten van de driehoek en je hebt de drie zwaartelijnen. Het zwaartepunt is het snijpunt van de zwaartelijnen, als je je driehoek daaraan ophangt, hangt hij in evenwicht.

Opgave 13: Zwaartepunt en zwaartekracht

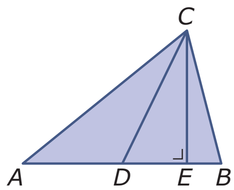
Hierboven wordt verteld dat de zwaartelijnen van een driehoek met de zwaartekracht samenhangen.

a Voer zelf dit experiment uit. Maak eerst bijvoorbeeld van karton een willekeurige driehoek die niet te klein en/of te licht is.

b Markeer het zwaartepunt van de driehoek. Laat zien dat de driehoek in evenwicht blijft als je hem in het zwaartepunt op een vinger balanceert.

Opgave 14: Verdelen in gelijke oppervlaktes

Een zwaartelijn verdeelt een driehoek in twee delen met dezelfde oppervlakte. Bekijk de figuur hiernaast. CD is een zwaartelijn en CE een hoogtelijn in ΔABC.



Figuur 9

a Hoe bereken je ook weer de oppervlakte van een driehoek?

b Laat nu zien dat de oppervlaktes van ΔADC en ΔDBC even groot zijn.

Testen

Opgave 15

Van ΔABC is $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm en $AC = 5$ cm.

a Teken deze driehoek met daarin de bissectrice van $\angle A$, de hoogtelijn vanuit punt B en de zwaartelijn vanuit punt C.

b Waarom is de zwaartelijn vanuit C ook de hoogtelijn vanuit C, ook de middelloodlijn van AB en ook de bissectrice van $\angle C$?

Opgave 16

Van ΔABC is $\angle A = 50°$, is $AB = 6$ en $AC = 5$.

Teken de driehoek met zijn omgeschreven cirkel.