

1.2 Rekenen in driehoeken

Inleiding

Hier zie je twee driehoeken.

Ze zijn gelijkvormig. Dat betekent dat hun hoeken gelijk zijn. En voor driehoeken is dat ook genoeg, hun zijden hebben dan automatisch een vaste vergrotingsfactor. De zijden van de grote driehoek zijn bijvoorbeeld allemaal 2,5 keer zo groot als die van de kleinere.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wanneer driehoeken gelijkvormig zijn;
- gelijkvormige driehoeken gebruiken bij berekeningen.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Om een driehoek te kunnen tekenen moet je er iets van weten. Bijvoorbeeld hoe lang de drie zijden zijn. Of hoe groot een hoek is en hoe lang de twee zijden op de benen van die hoek zijn.

- Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 55^\circ$, $AB = 5$ cm en $AC = 4$ cm. Krijgt iedereen die dit doet dezelfde driehoek?
- Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 55^\circ$, $AB = 5$ cm en $BC = 4$ cm. Is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave V2

Je weet van $\triangle ABC$ alleen de twee hoeken $\angle A = 55^\circ$ en $\angle B = 80^\circ$.

- Teken twee van die driehoeken.
- Wat valt op als je beide driehoeken vergelijkt?

Uitleg

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC met $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 8$ cm te tekenen, krijgen ze allemaal dezelfde driehoek. Driehoeken waarvan de overeenkomstige zijden gelijk zijn, zijn congruent.

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC te tekenen met $\angle A = 60^\circ$ en $\angle B = 40^\circ$, krijgen ze niet altijd dezelfde driehoeken. Maar al hun driehoeken worden wel gelijkvormig, omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

In de figuur hiernaast kun je beredeneren dat de driehoeken ABS en CDS twee paar gelijke hoeken hebben. Dat volgt uit de evenwijdigheid van AB en CD . De overeenkomstige zijden van deze twee driehoeken vormen daarom een verhoudingstabel.

AB 7 cm	BS 4,5 cm	AS 6 cm
CD a cm	DS b cm	CS 1,5 cm

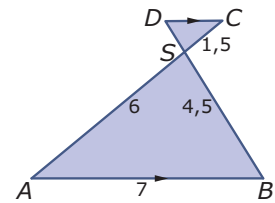
Tabel 1

De twee onbekende zijden kun je nu uitrekenen met behulp van de vergrotingsfactor van $\triangle ABS$ naar $\triangle CDS$.

Opgave 1

Bekijk de figuur in de [Uitleg](#).

- Waarom is $\angle ASB = \angle CSD$?
- Waarom is $\angle ABS = \angle CDS$?
- In de tekst wordt uitgelegd dat $\triangle ABS \sim \triangle CDS$. Staan de letters hierbij in de juiste volgorde?
- Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van $\triangle ABS$ naar $\triangle CDS$?
- Bereken de lengtes van CD en DS .

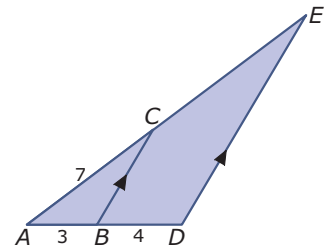


Figuur 2

Opgave 2

Je ziet hier ook twee driehoeken, namelijk $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$.

- Waarom is $\angle ABC = \angle ADE$?
- Waarom is $\angle ACB = \angle AED$?
- Schrijf de twee gelijkvormige driehoeken op met de letters in de juiste volgorde.
- Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADE$?
- Bereken de lengte van AE en CE .



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

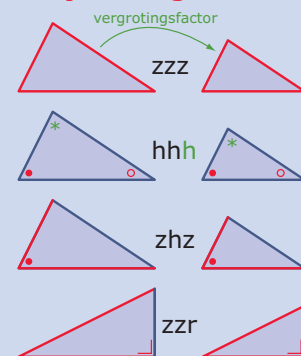
Om te onthouden

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als

- de drie paren overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen;
- er twee paren gelijke overeenkomstige hoeken zijn (Het derde paar is dan automatisch ook gelijk.);
- er één paar gelijke overeenkomstige hoeken zijn en de twee paren overeenkomstige zijden op de benen van die hoeken een verhoudingstabel vormen;
- beide driehoeken een rechte hoek hebben en twee paren overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen.

Bij gelijkvormige driehoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. De bijbehorende vergrotingsfactor bereken je door de lengtes van twee overeenkomstige zijden op elkaar te delen. En met die vergrotingsfactor kun je vaak onbekende lengtes van lijnstukken berekenen.

Gelijkvormigheid



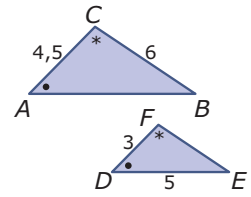
Figuur 4

Voorbeeld 1

Je ziet hiernaast twee gelijkvormige driehoeken. Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn en bereken de lengtes van AB en EF .

Antwoord

Beide driehoeken hebben twee paren gelijke hoeken. Daarom zijn ze gelijkvormig. De overeenkomstige zijden vormen dus een verhoudingstabel.



Figuur 5

AB	BC	AC
x	6	4,5
DE	EF	DF
5	y	3

Tabel 2

De vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle DEF$ bedraagt $3/4,5 = \frac{2}{3}$, dus $EF = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

De vergrotingsfactor van $\triangle DEF$ naar $\triangle ABC$ bedraagt $4,5/3 = 1,5$, dus $AB = 1,5 \cdot 5 = 7,5$.

Opgave 3

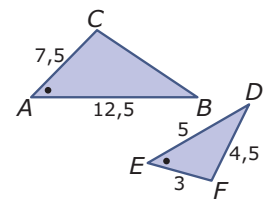
Bekijk **Voorbeeld 1**. De twee driehoeken zijn gelijkvormig omdat ze twee paren gelijke hoeken hebben.

- Waarom betekent dit automatisch dat er drie paren gelijke hoeken zijn?
- Zijde EF wordt berekend met de vergrotingsfactor $\frac{2}{3}$. Kun je die zijde ook berekenen met de omgekeerde vergrotingsfactor $\frac{3}{2}$? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken.

- Waarom zijn ze gelijkvormig?
- Vul aan (denk om de juiste volgorde van de letters): $\triangle ABC \sim \dots$
- Bereken de lengte van BC .



Figuur 6

Voorbeeld 2

In deze figuur zijn AB en CD evenwijdig.

Bereken de lengte van CD en die van CE .

Antwoord

Omdat $\angle A = \angle CDE$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle DCE$ (F-hoeken) is $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

Maak nu een verhoudingstabel voor de zijden en vul getallen of onbekenden in.

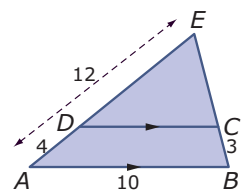
AB	BE	AE
10 cm	$x + 3$ cm	12 cm
DC	CE	DE
y cm	x cm	8 cm

Tabel 3

De vergrotingsfactor van $\triangle ABE$ naar $\triangle DCE$ is $8/12 = \frac{2}{3}$.

$$CD = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3}.$$

Om CE te berekenen gebruik je $x = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)$. Hieruit volgt $x = 6$ en dus $CE = 6$.



Figuur 7

Opgave 5

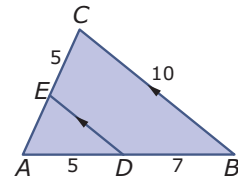
Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je in situaties waarin sprake is van evenwijdige lijnen gelijkvormige driehoeken kunt vinden en met behulp daarvan lengtes van lijnstukken berekenen.

- Waarom is $\triangle ABE \sim \triangle DCE$?
- Leg uit waarom $DE = 8$.
- Laat zien, dat inderdaad $CE = 6$.

Opgave 6

In deze figuur is $AB \parallel DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

- Waarom is $\triangle ABC \sim \triangle ADE$?
- Bereken de lengte van DE en van AE .

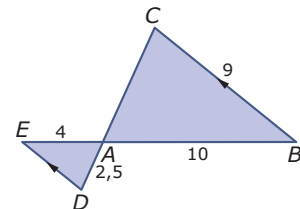


Figuur 8

Opgave 7

In deze figuur is $AB \parallel DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

- Vul aan $\triangle ABC \sim \dots$ en leg uit waarom deze driehoeken gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van DE en van AC .



Figuur 9

Voorbeeld 3

Bereken de lengte van AD in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

In rechthoekige driehoeken geldt ook de stelling van Pythagoras. Je kunt dus ook de lengte van BC berekenen met $BC^2 = 12^2 + 8^2$, dus $BC = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208}$.

In deze figuur zijn drie gelijkvormige driehoeken te vinden, namelijk $\triangle ABC$, $\triangle DAC$ en $\triangle DBA$. Ga na dat van die driehoeken alle drie de paren overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

Neem nu bijvoorbeeld de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DAC$ en maak een verhoudingstabel voor de zijden.

AB 12 cm	BC $\sqrt{208}$ cm	AC 8 cm
DA x cm	AC 8 cm	DC y cm

Tabel 4

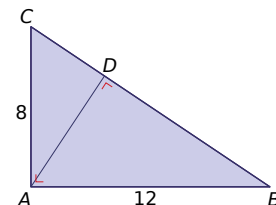
De vergrotingsfactor van $\triangle ABE$ naar $\triangle DAC$ is $8/\sqrt{208}$.

$$AD = 8/\sqrt{208} \cdot 12 \approx 6,7 \text{ cm.}$$

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** gaat het om het herkennen van gelijkvormige rechthoekige driehoeken.

- Waarom is $\triangle ABC \sim \triangle DAC$?
- Voer zelf de berekening van AD uit.

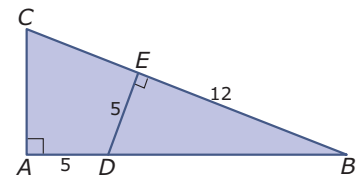


Figuur 10

- c Bereken de lengte van BD in één decimaal nauwkeurig. Doe dit een keer met behulp van de stelling van Pythagoras en ook een keer met behulp van gelijkvormigheid.

Opgave 9

Bereken AC .



Figuur 11

Verwerken

Opgave 10

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.

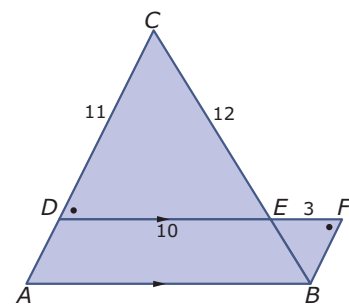
- a Licht toe waarom de driehoeken DEC en FEB gelijkvormig zijn.

- b Bereken de lengte van EB .

Je wilt de lengte van AB berekenen.

- c Welke gelijkvormige driehoeken gebruik je? Schrijf de gelijkvormigheid op de juiste wijze op.

- d Bereken de lengte van AB .



Figuur 12

Opgave 11

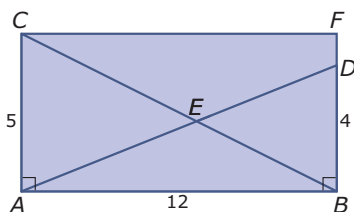
Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 7$. Op zijde AC ligt punt D zo, dat $\angle DBC = \angle A$.

- a Teken de driehoek met lijnstuk BD er in. Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

- b Punt D verdeelt de zijde AC in de twee stukken AD en DC . Bereken de lengte van die twee lijnstukken.

Opgave 12

Bekijk de figuur hieronder.



Figuur 13

Bereken CE en ED in één decimaal nauwkeurig.

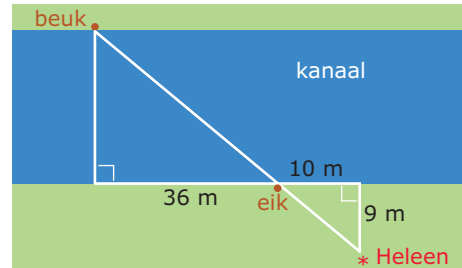
Opgave 13

De hoogte van een boom kun je bepalen door de lengte van zijn schaduw te meten. Boris meet dat een boom een schaduw heeft van 25 m. Hijzelf heeft een schaduw van 1,40 m. Nu is Boris 1,80 m lang.

Bereken de hoogte van de boom in m nauwkeurig.

Opgave 14

Heleen wil de breedte van een kanaal schatten. Ze gebruikt daarbij twee bomen die aan de oevers van het kanaal staan. Eerst bepaalt ze dat de afstand tussen beide bomen gemeten langs de oever 36 m is. Ze loopt dan nog 10 m door en bepaalt dan de afstand tot de oever van het punt waar ze beide bomen op één lijn ziet staan. In de figuur zie je een schets van de situatie.



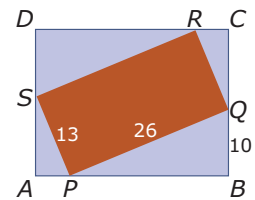
Figuur 14

Bereken de breedte van het kanaal in m nauwkeurig.

Opgave 15

Je ziet hier hoe rechthoek $PQRS$ precies past in rechthoek $ABCD$. Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de lengte en de breedte van rechthoek $ABCD$.

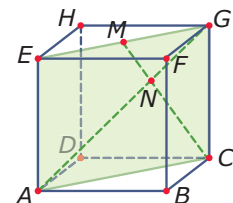


Figuur 15

Toepassen

Ook in ruimtelijke figuren komen congruente of gelijkvormige vlakke figuren voor. Je kunt daarvan bij het berekenen van lengtes van lijnstukken goed gebruik maken.

Bekijk de kubus hiernaast maar eens. Alle ribben zijn 4 cm lang. Punt M is het midden van EG . Met behulp van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras kun je de lengtes van AN en CN berekenen.



Figuur 16

Opgave 16: Lijnstukken in een kubus

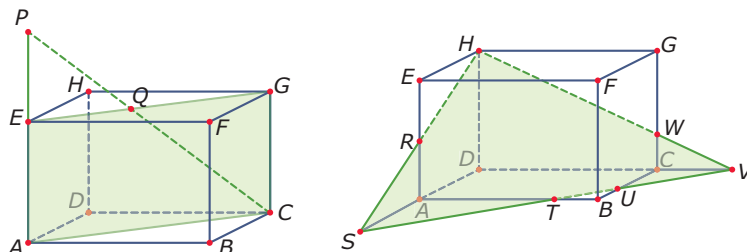
Hierboven wordt verteld dat je gelijkvormigheid ook goed kunt toepassen in ruimtelijke figuren, zoals een kubus.

Bekijk de figuur. Bedenk dat diagonaalvlak $ACGE$ een rechthoek is.

Teken dit diagonaalvlak op ware grootte en bereken met behulp van gelijkvormigheid de lengtes van AN en CN .

Opgave 17: Lijnstukken in een balk

Hier zie je twee keer de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 8$, $AD = 4$ en $AE = 4$ cm. Punt P ligt op het verlengde van AE en $EP = 3$ cm. Verder is punt R het midden van AE , ligt punt S op het verlengde van DA en ligt punt V op het verlengde van DC met $CV = 2$ cm.



Figuur 17

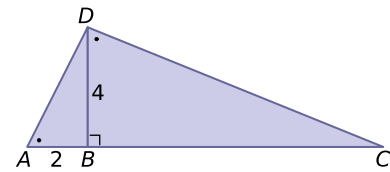
Bereken de lengtes van EQ , AS , CW en TU .

Testen

Opgave 18

Je ziet hier twee rechthoekige driehoeken die tegen elkaar zijn gelegd.

- Waarom zijn beide driehoeken gelijkvormig?
- Bereken de lengte van CD .



Figuur 18

Opgave 19

Je kunt met een rechte stok gemakkelijk hoogtes meten op een zonnige dag.

Je wilt de hoogte van een verticale vlaggenmast weten. Je meet de lengte van de schaduw van die mast: 10,5 m. Je houdt je stok verticaal op de grond en meet ook daarvan de lengte van de schaduw. Je hebt een stok van 60 cm en de schaduw is 75 cm lang.

Hoe hoog zit de top van de vlaggenmast boven de grond?



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
