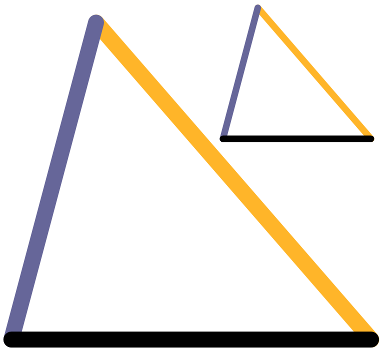
1.1 Gelijk of gelijkvormig

Inleiding

Hier zie je twee driehoeken.
Hebben ze dezelfde vorm? En wat weet je dan van hun hoeken en zijden?
Daarover gaat dit onderdeel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Voorkennis

- de basisbegrippen van vlakke meetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek;
- namen en eigenschappen van vlakke figuren.

Verkennen

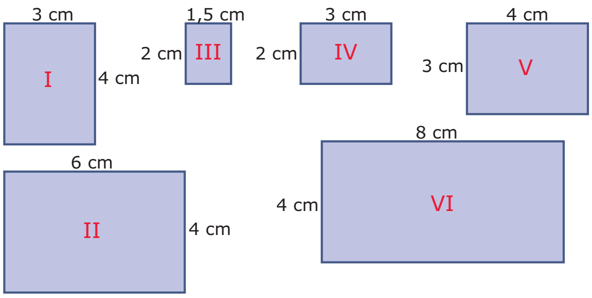
Opgave V1

Je wilt een poster op A4-formaat vergroten tot A3-formaat. De afmetingen van het A4-tje zijn 210 mm bij 297 mm. Een vel A3-papier heeft een twee keer zo grote oppervlakte.

Met hoeveel procent moet je de lengte en de breedte van het A4-tje vergroten?

Opgave V2

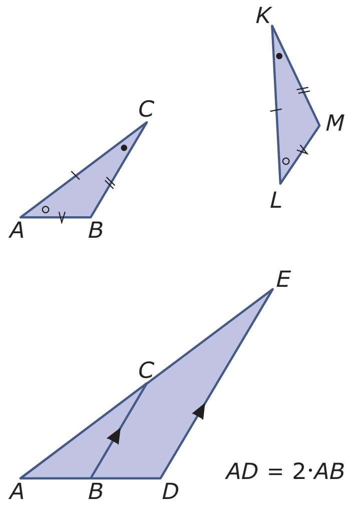
Je ziet hier een aantal rechthoeken.



Figuur 2

Welke rechthoeken zijn gelijk? En welke rechthoeken zijn niet gelijk maar hebben dezelfde verhoudingen van lengte en breedte?

Uitleg



Figuur 3

Als twee figuren gelijk zijn, zoals in het bovenste plaatje, dan betekent dit dat je als het ware beide figuren kunt uitknippen en precies over elkaar heen kunt leggen. De 'overeenkomstige hoeken' zijn dan even groot en de 'overeenkomstige zijden' zijn even lang. Figuren die precies gelijk aan elkaar zijn noem je 'congruent'. Hier zijn de driehoeken ABC en LMK congruent en dat schrijf je als $\Delta ABC \cong \Delta LMK$.

Maar er bestaan ook figuren die wel dezelfde vorm hebben, maar toch niet even groot zijn. De éne figuur is dan een vergroting (of verkleining) van de andere. Dit betekent dat wel alle hoeken van beide figuren even groot zijn, maar dat de zijden van de éne figuur met een vaste factor moeten worden vermenigvuldigd.
In het onderste plaatje zie je dat de lijnstukken BC en DE evenwijdig zijn. Dus zijn de hoeken bij B en D en die bij C en E even groot. De zijde AD is tweemaal zo groot als AB. Dit geldt ook voor DE en BC en voor AE en AC. De zijden van ΔADE zijn 2 keer zo groot als de overeenkomstige zijden van ΔABC. Je zegt nu dat de driehoeken ABC en ADE 'gelijkvormig' zijn en dat schrijf je als $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. ΔADE is een vergroting van ΔABC met 'vergrotingsfactor' 2.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je wat het verschil is tussen gelijke (dus congruente) driehoeken en gelijkvormige driehoeken.

Bekijk eerst de bovenste figuur.

a Waaraan zie je dat de overeenkomstige zijden van beide figuren gelijk zijn?

b Je ziet dat er twee paren gelijke hoeken zijn in de bovenste figuur. Waarom is dan automatisch het derde paar hoeken ook gelijk?

c Je ziet dat $\Delta ABC \cong \Delta LMK$. Waarom wordt bij de tweede driehoek de lettervolgorde zo gekozen?

Bekijk nu de tweede figuur. Je ziet dat evenwijdige lijnstukken worden aangeduid door pijltjes in de lijnstukken.

d Waarom weet je nu zeker dat $\angle ABC = \angle ADE$?

e Wordt er bij het opschrijven van de gelijkvormige driehoeken ook op de volgorde van de letters gelet?

f Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor als je ΔABC opvat als 'vergroting' van ΔADE?

g Stel de vergrotingsfactor van ΔABC naar ΔADE is 2,5. Zijn beide driehoeken dan nog steeds gelijkvormig?

Opgave 2

Het herkennen van gelijkvormige figuren of congruente figuren is vaak lastig.

a Waarom zijn alle vierkanten gelijkvormig en/of congruent?

b Waarom zijn niet alle rechthoeken gelijkvormig en/of congruent?

c Zijn alle gelijkzijdige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

d Zijn alle gelijkbenige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

e Waarom zijn alle congruente figuren ook gelijkvormig? Van welke vergrotingsfactor is er dan sprake?

Opgave 3

Jurre heeft twee rechthoekige afbeeldingen van een verschillend formaat op zijn computer. Afbeelding A is 20 mm bij 16 mm en afbeelding B is 36 mm bij 24 mm.
Hij wil ze op een groot rechthoekig scherm van 1,65 m breedte en 1,10 m hoogte laten zien. Ze worden daarom vergroot.

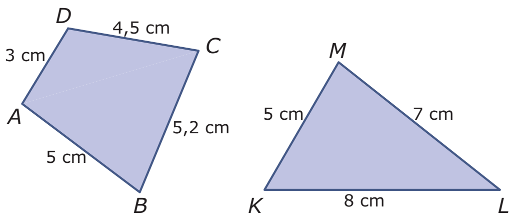
a Welke van deze twee afbeeldingen past na vergroting precies op het grote scherm?

De andere afbeelding vergroot Jurre zo dat hij alles kan zien.

b Blijft er op het scherm dan ruimte over in de breedte of de hoogte? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Hier zie je een vierhoek en een driehoek waarvan de lengtes van de zijden bekend zijn.



Figuur 4

a Teken de driehoek na. Moet je daarvoor nog een hoek opmeten?

b Leg uit hoe je de vierhoek kunt natekenen. Moet je nu extra metingen doen?

c Leg uit hoe je een gelijkvormige vierhoek kunt tekenen met een vergrotingsfactor van 1,5.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee figuren heten **congruent** als ze voor wat betreft hun vorm en hun afmetingen precies gelijk zijn. Dit betekent voor veelhoeken dat hun **overeenkomstige hoeken** gelijk zijn èn hun **overeenkomstige zijden** gelijk zijn.

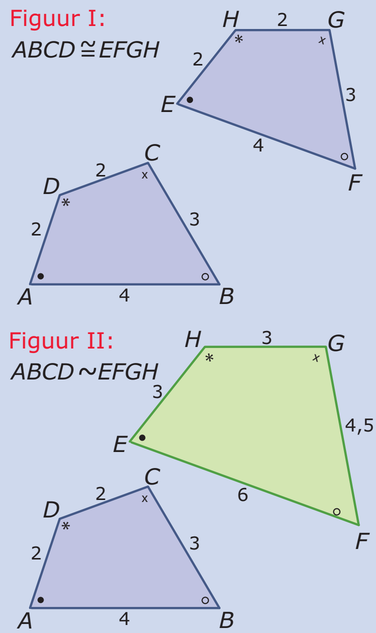
Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting of verkleining van de andere is. Voor veelhoeken betekent dit dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn en de overeenkomstige zijden met eenzelfde **vergrotingsfactor** zijn vermenigvuldigd.

Bij gelijkvormige veelhoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. Bij de gelijkvormige vierhoeken hiernaast hoort onderstaande verhoudingstabel.

AB 4 cm	BC 3 cm	CD 2 cm	DA 2 cm
EF 6 cm	FG 4,5 cm	GH 3 cm	HE 3 cm

Tabel 1

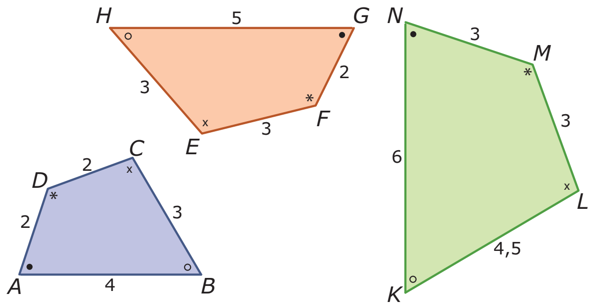
De bijbehorende vergrotingsfactor is 1,5.



Figuur 5

Voorbeeld 1

Laat met een berekening zien welke van de onderstaande vierhoeken gelijkvormig zijn en welke niet.



Figuur 6

Antwoord

Van alle drie de vierhoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk. Het gaat dus om de overeenkomstige zijden. Die moeten een verhoudingstabel opleveren.

Vergelijk eerst bijvoorbeeld de vierhoeken $ABCD$ en $GHEF$. (Je ziet dat de lettervolgorde van de tweede vierhoek zo is gekozen dat de letters bij de overeenkomstige hoeken in dezelfde volgorde staan als die van vierhoek $ABCD$.)
Maak een tabel zoals deze waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan.

AB 4 cm	BC 3 cm	CD 2 cm	DA 2 cm
GH 5 cm	HE 3 cm	EF 3 cm	FG 2 cm

Tabel 2

Je ziet dat er geen vaste vergrotingsfactor vanuit de zijden van $ABCD$ waarmee je de overeenkomstige zijden van $GHEF$ krijgt. Deze tabel is geen verhoudingstabel. Dus deze twee vierhoeken zijn niet gelijkvormig.

Op dezelfde manier kun je de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ vergelijken.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Laat met behulp van een tabel zien dat de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ wel gelijkvormig zijn.

b De vierhoek $PQRS$ heeft zijden die allemaal precies 2 keer zo groot zijn als de overeenkomstige zijden van vierhoek $ABCD$. Zijn deze twee vierhoeken dus gelijkvormig? Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

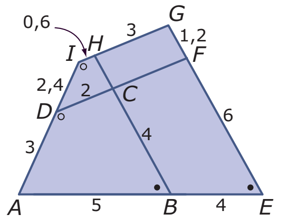
Opgave 6

In de figuur hiernaast tref je een heleboel vierhoeken aan.

a Hoeveel?

b Waarom hebben de vierhoeken $ABCD$ en $AEFD$ wel gelijke hoeken, maar zijn ze toch niet gelijkvormig?

c Waarom zijn de vierhoeken $ABCD$ en $AEGI$ gelijkvormig?



Figuur 7

Opgave 7

De vierhoeken $ABCD$ en $PQRS$ zijn gelijkvormig. Verder is $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 3$, $AD = 4$ en $QR = 8$ cm.

Bereken de lengte van PQ. Werk bijvoorbeeld met een verhoudingstabel van overeenkomstige zijden en bepaal de vergrotingsfactor.

Voorbeeld 2

Teken met passer en geodriehoek een driehoek ABC met $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm en $AC = 6$ cm. Vraag een medeleerling om dit ook te doen. Zijn jullie driehoeken verschillend?

Teken vervolgens ΔDEF waarvan $DE = 2 \cdot AB$, $EF = 2 \cdot BC$ en $FE = 2 \cdot CA$. Zijn de driehoeken ABC en DEF automatisch gelijkvormig?

Antwoord

Alle driehoeken met zijden van 4, 5 en 6 cm zijn hetzelfde. Ze passen allemaal op elkaar en zijn dus congruent. De lengtes van de zijden bepalen de vorm van de driehoek. Twee driehoeken zijn dus congruent als hun zijden gelijk zijn. Op de hoeken hoef je dan niet meer te letten.

Verder zie je dat het vergroten van alle zijden met dezelfde factor een driehoek oplevert met dezelfde vorm als de oorspronkelijke driehoek, dus met dezelfde hoeken. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als de overeenkomstige zijden met dezelfde factor zijn vermenigvuldigd.

Bij driehoeken hoef je niet op de zijden en de hoeken te letten om te beoordelen of ze congruent of gelijkvormig zijn. Je hoeft alleen maar naar de zijden te kijken of alleen maar naar de hoeken te kijken.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** worden driehoeken vergeleken.

a Teken de beschreven ΔABC door te beginnen met zijde AB.

b Teken ΔABC nog eens, maar begin nu met zijde BC. Krijg je dezelfde ΔABC?

c Als je van een vierhoek de lengtes van de zijden weet, kun je hem dan tekenen?

d Teken ook ΔDEF. Ga na, dat de hoeken gelijk zijn aan die van ΔABC.

e Teken ook ΔKLM waarvan de overeenkomstige zijden de helft zijn van die van ΔABC. Ga na, dat ook nu beide driehoeken gelijkvormig zijn.

Opgave 9

Gegeven zijn ΔABC met $AB = 4$ cm, $\angle A = 50°$ en $\angle B = 60°$ en ΔDEF met $DE = 6$ cm, $\angle D = 50°$ en $\angle E = 60°$.

a Teken de beschreven driehoeken.

b Waarom is $\angle C = \angle F$?

c Meet van beide driehoeken ook de overige zijden op. Ga na dat de overeenkomstige zijden met dezelfde factor worden vermenigvuldigd.

Uit het voorgaande kun je opmaken dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

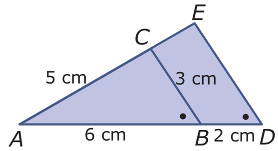
d Geldt dit ook voor vierhoeken? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Je ziet hier ΔABC en ΔADE. In de figuur vind je enkele afmetingen.

a Leg uit waarom $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

b Bereken de lengte van de lijnstukken DE en CE.



Figuur 8

Verwerken

Opgave 11

Een rechthoek heeft zijden van 18 cm en 30 cm. Van een verkleining van die rechthoek is één van de zijden 6 cm.

Welke afmetingen kan de verkleining hebben? Geef beide mogelijkheden.

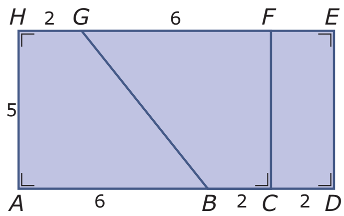
Opgave 12

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.

a Licht toe waarom de vierhoeken $ABGH$ en $FGBC$ congruent zijn.

b Zijn de vierhoeken $ABGH$ en $EGBD$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.

c Zijn de rechthoeken $ADEH$ en $DEFC$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.



Figuur 9

Opgave 13

$\Delta PQR \sim \Delta ABC$. Verder is gegeven $AC = 7{,}2$, $AB = 9$, $BC = 5$ en $PQ = 13$.

Maak een schets van de situatie, denk om de volgorde van de letters. Bereken de overige twee zijden van ΔPQR.

Opgave 14

$\Delta KLM \sim \Delta ABC$. Verder is gegeven $AB = 7{,}4$, $BC = 5$, $KM = 2{,}8$ en $ML = 3{,}5$.

Maak een schets van de situatie en bereken de twee zijden van deze driehoeken die je nog niet weet.

Opgave 15

De lengte van een vrachtwagen is 5,04 meter. De lengte van een schaalmodel van deze vrachtwagen is 18 cm. Op een foto lijken ze even groot. De afstand tussen de fotograaf en het schaalmodel is 35 cm.

Bereken hoeveel de vrachtwagen verder van de fotograaf staat dan het schaalmodel.

Opgave 16

Willem heeft een poster van 50 bij 80 cm. Hij heeft een lijst voor de poster van 60 bij 100 cm. Willem ontdekt dat de poster daar niet mooi inpast en wil de poster zo bijsnijden dat hij gelijkvormig is met de lijst.

Hoe moet hij de poster bijsnijden opdat er zo min mogelijk van verloren gaat?

Toepassen

Bekijk de applet: Gulden Snede

In de applet zie je een rechthoek met daarin een vierkant met een kleinere rechthoek ernaast. Is die kleinere rechthoek gelijkvormig met de grote rechthoek? Is het mogelijk om de rechthoek zo aan te passen dat dit het geval is?

Deze vraag leidt tot de bekende **Gulden Snede**. Dat is een al uit de Oudheid bekende manier om een lijnstuk zoals AE in twee delen te verdelen.
De vergrotingsfactor van AB naar AE waarbij de rechthoeken gelijkvormig zijn is de **Gulden Snede**.

Opgave 17: Gulden Snede

Hierboven wordt de vraag gesteld of het mogelijk is om een rechthoek te verdelen in een vierkant en een kleinere rechthoek die met de gegeven rechthoek gelijkvormig is.

Met de applet kun je de lengte van de rechthoek wat aanpassen.

Probeer met de applet te bepalen welke afmetingen de rechthoek $AEFD$ moet hebben om ervoor te zorgen dan hij gelijkvormig is met rechthoek $EFCB$. Bepaal ook de vergrotingsfactor van AB naar AE, de Gulden Snede dus.

Testen

Opgave 18

Van ΔABC is gegeven $AB = 8$, $AC = 5$ en $BC = 4$.

$\Delta DEF \sim \Delta ABC$ en $DF = 7{,}5$.

a Welke van beide driehoeken is het grootst?

b Bereken de zijden van ΔDEF die je nog niet weet.

Opgave 19

Je hebt heel veel verschillende blaadjes papier verzameld uit oude boeken, kranten, tijdschriften, kalenders en nog meer.

a Waarom zijn alle vierkante blaadjes papier gelijkvormig?

b Bij jouw blaadjes papier zit een rechthoek van 21 cm bij 29,7 cm (A4-formaat) en ook een rechthoek met een kleinste zijde van 15 cm. Hoe groot is de andere zijde van die rechthoek als beide rechthoeken gelijkvormig zijn?

Practicum: Gelijkvormige vierhoeken en driehoeken

Met deze applets kun je een vierhoek met gegeven zijden en een driehoek met gegeven zijden vergroten. Ga na dat je van de vierhoeken de vorm nog kunt veranderen (zonder de lengtes van de zijden te veranderen) door de punten C en H te bewegen. Van de driehoeken kun je de vorm niet meer veranderen als de zijden vast liggen.

Bekijk de applet.

Bekijk de applet.