

1.4 Kansen

Inleiding

Als je met twee dobbelstenen gooit en je telt steeds het totaal aantal ogen dat boven komt, dan zul je merken dat bepaalde aantallen vaker voorkomen dan andere. Je kunt een frequentietabel maken en dit nagaan. Je moet dan wel flink wat keren gooien...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kennismaken met het begrip kans als relatieve frequentie;
- kansen berekenen in situaties die zich daartoe lenen.

Voorkennis

- werken met statistische gegevens, (frequentie)tabellen en diagrammen;
- rekenen met breuken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak 'wiskunde' in klas 3G. Je hebt geen idee wie welk cijfer heeft gehaald. Je komt iemand uit die klas tegen.

- Hoe groot is de kans dat zij een 8 voor wiskunde heeft op haar rapport?
- Hoe groot is de kans dat zij een 10 voor wiskunde heeft op haar rapport?
- Hoe groot is de kans dat zij een onvoldoende heeft?

wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

Figuur 2

Uitleg

Je hebt een frequentietabel van de 31 rapportcijfers voor wiskunde in klas 3G. En je komt zo maar een leerling uit deze klas tegen die je verder niet kent. Je kunt dan zeggen dat er een kans van 6 op 31 is dat hij het rapportcijfer 8 heeft. Vaak geef je die kans liever aan met een breuk: de kans op een cijfer 8 is dan $\frac{6}{31} \approx 0,19$ en dat is ongeveer 19%.

Je kunt een kans opvatten als een relatieve frequentie: hoe vaak komt een bepaalde situatie in verhouding tot alle mogelijke situaties voor? Dus hier: hoe vaak komt het cijfer 8 voor in verhouding tot de 31 rapportcijfers die er in totaal zijn? Je leest kansen dus af uit een frequentietabel.

wiskunde			
RE	freq	rel.freq.	%
1	0	0,00	0,0
2	0	0,00	0,0
3	0	0,00	0,0
4	1	0,03	3,2
5	4	0,13	12,9
6	9	0,29	29,0
7	8	0,26	25,8
8	6	0,19	19,4
9	3	0,10	9,7
10	0	0,00	0,0
	31	1	100

Figuur 3

Bij het werpen met een dobbelsteen kun je ook wel een frequentietabel maken. Bij een normale dobbelsteen zoals deze zijn er zes mogelijkheden: 1 oog, 2 ogen, ..., 6 ogen. Maar als de dobbelsteen eerlijk is, dan hoef je niet echt een tabel te maken. Je kunt dan de relatieve frequenties wel voorspellen, allemaal $\frac{1}{6} = 0,166\dots$ en dat is ongeveer 17%. De kans op het gooien van bijvoorbeeld 5 ogen is $\frac{1}{6}$.



Figuur 4

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een frequentietabel van de rapportcijfers voor wiskunde van klas 3G. Daaruit kun je kansen afleiden.

- Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde het rapportcijfer 6 heeft?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde een voldoende op het rapport heeft?
- Je weet dat Jan Buma en Roslyn Sniijders uit 3G een 7 voor wiskunde staan op hun rapport. Je komt Christien Willemse uit 3G tegen en je hebt geen idee hoe goed ze is in wiskunde. Wat is de kans dat ze een voldoende op haar rapport heeft? Geef je antwoord in procenten.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt ook gesproken over de kansen bij het gooien met een dobbelsteen. Er wordt gesteld dat elk vlakje een relatieve frequentie van $\frac{1}{6}$ heeft. Is dat wel zo?

- Pak een dobbelsteen en gooi er 60 keer mee, je kunt ook het **Practicum** gebruiken. Maak een frequentietabel zoals deze.
- Krijg je inderdaad allemaal gelijke relatieve frequenties van $\frac{1}{6}$?
- Waarom licht het toch voor de hand om te veronderstellen dat als je maar vaak genoeg gooit alle relatieve frequenties $\frac{1}{6}$ worden?
- Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen 5 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans 'in werkelijkheid' is?
- Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen meer dan 4 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans 'in werkelijkheid' is?



Figuur 5

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **kans** op een bepaalde situatie versta je de **relatieve frequentie** van die situatie. Dat betekent de verhouding van het aantal keren dat die situatie zich voordoet ten opzichte van het totaal aantal mogelijkheden. Deze relatieve frequenties haal je uit frequentietabellen.

Het zijn altijd getallen tussen 0 en 1.

Een kans van 0 betekent dat de situatie zich niet voordoet, een kans van 1 is een zekere situatie, alle relatieve frequenties samen.

Kansen worden ook wel als percentage gegeven.

In sommige gevallen zoals het werpen met een dobbelsteen, of een geldstuk, of het trekken van een kaart uit een kaartspel, kun je die relatieve frequenties voorspellen. Je doet dan aannames zoals 'alle ogen van de dobbelsteen hebben een even grote waarschijnlijkheid om boven te komen', of 'alle kaarten hebben dezelfde waarschijnlijkheid om gekozen te worden', enz.

Daarom wordt het werken met kansen vaak toegepast in kansspelen...

Voorbeeld 1

Bij de **Rijksoverheid** vind je een aparte pagina voor jongeren van 13 of 14 jaar.

Deze pagina bevat informatie over bijbaantjes.

Er is onderzocht wat de leeftijd is van de jongeren die deze pagina bezoeken. De gegevens staan in de tabel.

Hoe groot is de kans dat een jongere die deze pagina bezoekt geen 14 jaar is?

leeftijd	percentage
12	10
13	18
14	39
15	20
16	13

Antwoord

Tabel 1

De getallen in de tabel zijn al relatieve frequenties. Ze zijn gegeven in procenten.

De relatieve frequentie van de niet 14-jarigen is $10 + 18 + 20 + 13 = 61\%$.

De gevraagde kans kun je ook geven als 61 op de 100 of als 0,61.

Opgave 3

Werk met de gegevens in **Voorbeeld 1**.

- Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 14 jaar oud is?
- Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt hoogstens 14 jaar oud is?
- Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt minstens 14 jaar oud is?
- Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 17 jaar oud is?
- Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt ouder dan 11 is?

Opgave 4

In het Excel-bestand **Top 2000 in 2012** zie je hoe de Top 2000 er in 2012 uitzag, uit welk jaar een nummer kwam en in welk uur het gedraaid werd. Veel artiesten of groepen hebben meerdere nummers in de Top 2000 van 2012.

Je kiest een willekeurig nummer uit de Top 2000.

- Hoe groot is de kans dat het een nummer van The Beatles is?
- Hoe groot is de kans dat dit een nummer uit de jaren 1980– < 1990 is?
- Hoe groot is de kans dat het een nummer van Queen is?

Opgave 5

In alle derde klassen van een school is gevraagd wie er linkshandig is en wie rechtshandig. Hiernaast zie je de resultaten.

	linkshandig	rechtshandig
jongen	15	116
meisje	13	134

Tabel 2

- Hoe groot is de kans dat een willekeurige derdeklasser van deze school linkshandig is?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurig meisje uit de derde klas linkshandig is? Is die kans groter of kleiner dan die voor een willekeurige jongens uit de derde klas?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige linkshandige uit de derde klas een jongens is?

Voorbeeld 2

Je gooit met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans op 7 ogen op beide samen?

Antwoord

Met twee dobbelstenen gooi je samen 2 ogen, 3 ogen, ..., 11 ogen, of 12 ogen. Maar nu is het lastig om de frequentietabel te voorspellen. 2 ogen kun je maar op één manier gooien, elke dobbelsteen 1 oog. Maar 7 ogen kun je op veel manieren gooien: 1 en 6, 2 en 5, enz.

Daarom maak je eerst een overzicht van alle mogelijke totale ogen aantallen bij twee dobbelstenen. Deze kruistabel is daarvoor heel geschikt. Daarmee kun je voorspellen dat van de 36 keer gooien gemiddeld 1 keer 2 ogen zal voorkomen. En ook dat er van de 36 keer gooien gemiddeld 6 keer 7 ogen boven zal liggen. De kans op 7 ogen schat je dus op 6 op de 36, ofwel $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.



Figuur 6

		eerste dobbelsteen					
		1	2	3	4	5	6
tweede dobbelsteen	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Figuur 7

Opgave 6

Bekijk in het **Voorbeeld 2** hoe je kansen bepaalt bij het gooien met twee dobbelstenen.

- a** Ga eerst zelf even experimenteren met behulp van twee dobbelstenen of het **Practicum**. Werp 360 keer met twee dobbelstenen en maak een tabel zoals deze.

aantal ogen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frequentie											
relatieve frequentie											

Figuur 8

- b** Maak net zo'n tabel met frequenties en relatieve frequenties, maar nu gebaseerd op de kruistabel in het voorbeeld. Vergelijk beide tabellen. Zijn er grote verschillen?
- c** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen 10 ogen gooit?
- d** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen hoogstens 10 ogen gooit?
- e** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen minstens 10 ogen gooit?

Opgave 7

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, 13 kaarten van elke 'kleur': ruiten, harten, schoppen en klaveren. Van elke kleur zijn er de kaarten 2, 3, ..., 9, 10, boer, vrouw, heer en aas.

Het kaartspel wordt goed geschud en er wordt gedeeld.

- a Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een aas is?
- b Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een hartenaas is?
- c Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een aas is?
- d Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een ruitkaart is?

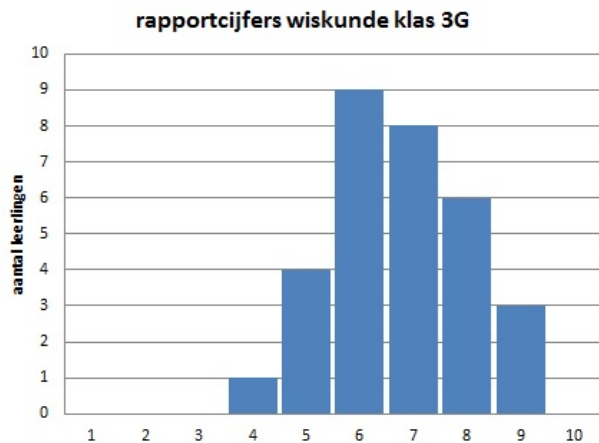


Figuur 9

Verwerken

Opgave 8

Dit staafdiagram geeft de rapportcijfers wiskunde van klas 3G weer. Je komt een leerling uit die klas tegen en je hebt geen idee hoe goed hij in wiskunde is.



Figuur 10

- a Hoe groot is de kans dat hij een onvoldoende heeft?
- b Hoe groot is de kans dat hij een 8 of hoger heeft?
Een leerling uit 3G vertelt dat zij een voldoende heeft.
- c Hoe groot is de kans dat zij een 8 of hoger heeft?

Opgave 9

Uit onderzoek is gebleken dat wel 8% van de mannen lijdt aan een vorm van kleurenblindheid. Bij vrouwen is dat percentage veel lager. In de tabel zie je de percentages.

	mannen	vrouwen
kleurenblind	8%	0,5%
niet kleurenblind	92%	99,5%

Tabel 3

- Je komt een mannelijke medeleerling tegen (waarvan je niet weet of hij kleurenblind is). Hoe groot is de kans dat hij kleurenblind is?
- Anne is kleurenblind. Hoe groot is de kans dat Anne een man is? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)
- Hoeveel procent van de mensen is kleurenblind? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)

Opgave 10

Met deze viervlaksdobbelsteen is zojuist een 1 gegooid.

- Hoe groot is bij een viervlaksdobbelsteen de kans daarop?
- Hoe groot is de kans dat je 6 gooit?
- Hoe groot is de kans dat je minstens 6 gooit?
- Hoe groot is de kans dat je hoogstens 6 gooit?



Figuur 11

Opgave 11

Hier zie je hoe in één van de eerste series afleveringen van 'Ik hou van Holland' door Jeroen van Koningsbrugge aan het rad wordt gedraaid om te bepalen hoeveel punten hij voor het goede antwoord krijgt.

- Hoe groot is de kans dat hij 50 punten krijgt?
- Het team van Jeroen staat 12 punten achter op het andere team. Hoe groot is de kans dat ze die achterstand in één keer inlopen?
- Gerekend over een heel seizoen wordt er een flink aantal keren aan dit rad gedraaid. Hoeveel punten zullen er gemiddeld worden gedraaid?



Figuur 12

Toepassen

In de meeste gevallen kun je kansen alleen bepalen met behulp van statistiek. Neem bijvoorbeeld de kans dat een mens een bepaalde leeftijd haalt, dat een meteoriet op Aarde stort, dat er een jongetje of een meisje wordt geboren, dat jouw favoriete nummer in de Top 2000 terecht komt, enz.

Stel je bijvoorbeeld voor dat je wilt weten hoe groot de kans is dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen. Er is maar één manier om de kans daarop te berekenen: heel vaak proberen en bijhouden wat er gebeurt.



Figuur 13

Opgave 12: Punaises

Als je de kans wilt weten dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen, moet je experimenteren.

- Gooi 100 keer met een punaise. Houd bij hoe vaak de punt boven komt en hoe vaak niet.
- Hoe groot is volgens jou de kans dat een punaise met zijn punt boven komt? Vergelijk je resultaat met die van de andere leerlingen.
- Als je de resultaten van meerdere leerlingen vergelijkt, kun je dan een uitspraak doen over de kans dat een punaise met zijn punt boven komt.

Opgave 13: Kansen bij voetbal

Bekijk de volgende situaties. Geef aan of je de beschreven kans kunt beredeneren of alleen door experimenteren en statistieken kunt bepalen.

- De kans dat een bepaalde voetballer met de volgende strafschoep een doelpunt scoort.
- Bij de toss aan het begin van een voetbalwedstrijd wordt een geldstuk opgeworpen; het gaat om kop of munt. Hoe groot is de kans dat jouw ploeg mag aftrappen?
- Bij de voetbaltoto moet je van 13 wedstrijden voorspellen of de thuisclub wint, verliest of dat er wordt gelijk gespeeld? Hoe groot is de kans dat je alles goed hebt als je deze voetbaltoto puur op de gok invult?
- Hoe groot is de kans dat Go Ahead Eagles van Ajax wint?

Opgave 14: Kansspel?

Een spel heet een **kansspel** als de uitkomsten ervan zuiver door het toeval worden bepaald.

Hieronder worden een paar spellen beschreven. Leg uit of er sprake is van een kansspel of niet.

- Je gooit met drie geldstukken en kijkt hoeveel keer kop boven komt.
- Bij het 'Boter, kaas en eieren' moet je om beurten een kruis (speler 1) of een rondje (speler 2) in een schema van 3 bij 3 plaatsen. Wie het eerst drie gelijke tekens op een rij (horizontaal, verticaal, of diagonaal) heeft, wint het spel?
- Het delen van kaarten uit een goed geschud volledig kaartspel.
- Het meespelen met de toto, waarbij je van een serie van 13 voetbalwedstrijden moet kiezen uit: de thuisclub wint, verliest of er wordt gelijk gespeeld.

Testen

Opgave 15

Het spel **Rummikub** heeft 106 steentjes: twee sets van de getallen 1 tot en met 13 in de kleuren rood/geel/blauw/zwart, en twee jokers. Deze hebben een rood en een zwart gezichtje. Bij het delen liggen alle stenen omgekeerd en door elkaar gehusseld op tafel, zodat je niet kunt zien welke steen je pakt.

Je pakt de eerste steen.

- Hoe groot is de kans dat het een joker is?
- Hoe groot is de kans dat er het cijfer 11 op staat?
- Hoe groot is de kans dat het hoogstens een 3 is?
- Waarom is het berekenen van deze kansen niet meer te doen als je als nummer vier jouw eerste steen pakt?



Figuur 14

Opgave 16

Op een school is de keuze in 3VWO voor wiskunde B in kaart gebracht. In de tabel zie je de aantallen.

	jongens	meisjes
wiskunde B	18	12
geen wiskunde B	32	40

- a** Je komt een mannelijke medeleerling tegen (waarvan je niet weet welke keuze hij heeft gemaakt).
Hoe groot is de kans dat hij wiskunde B wil kiezen?
- b** Hoe groot is de kans dat een willekeurige wiskunde B kiezer een meisje is?
- c** Hoeveel procent van deze leerlingen kiest wiskunde B?

Tabel 4

Practicum

[Bekijk de applet.](#)



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
