3.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Met exponentiële verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip exponentiële functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een exponentiële functie. Vooral het werken met groeifactoren en het omrekenen van een groeifactor bijvoorbeeld per jaar naar een groeifactor per maand (en omgekeerd) zijn behandeld. Daarbij heb je hogere machtswortels nodig. Ook het werken met exponentiële vergelijkingen is aan de orde geweest, daarbij moet je (voorlopig) nog werken met inklemmen en tabellen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Exponentiële verbanden** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2 en 3 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippenlijst

- groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- lineaire groei — exponentiële groei;
- exponentiële functie — asymptoot.

Activiteitenlijst

- werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Opgave 1

Een hoeveelheid groeit met 5% per uur.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

c Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier in vier decimalen nauwkeurig? En het groeipercentage per kwartier?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van deze hoeveelheid?

Opgave 2

Een hoeveelheid neemt af met 16% per jaar.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand in drie decimalen nauwkeurig? En het groeipercentage per maand?

c Hoeveel bedraagt de halveringstijd van deze hoeveelheid?

Opgave 3

In een natuurgebied is het aantal wilde zwijnen aan het toenemen. In de tabel zie je het aantal wilde zwijnen in dit gebied in de loop van een aantal jaren, afgerond op tientallen. Bij Staatsbosbeheer wil men het verloop van het aantal dieren voorspellen. Als er meer dat 500 wilde zwijnen zijn, dan moeten er maatregelen worden getroffen. Noem het aantal wilde zwijnen Z, afhankelijk van de tijd t in jaren na 2008.

jaartal	2008	2009	2010	2011
aantal zwijnen	310	330	350	370

Tabel 1

a Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor Z afhankelijk van t?

b Als je uitgaat van exponentiële groei, hoeveel bedraagt dan het groeipercentage per jaar ongeveer? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Welke formule geldt voor Z afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?

d Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal wilde zwijnen voor het eerst de 500 zal overschrijden.

Opgave 4

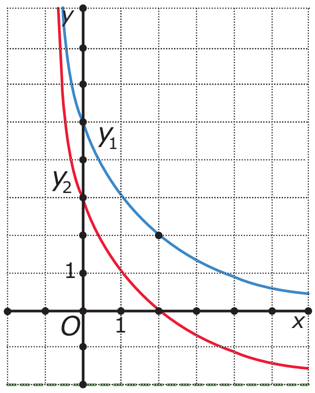
De grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x$ gaat door de punten $A(2,20)$ en $B(6,10)$.

Bereken b in gehelen nauwkeurig en g in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 5

Je ziet hier de grafieken van twee exponentiële functies. y_1 heeft de x-as als asymptoot en y_2 de lijn $y = -2$

Stel bij beide functies een passende formule op.



Figuur 1

Testen

Opgave 6

Neem aan dat je op 1 januari van dit jaar een bedrag van € 1000,= op een spaarrekening hebt gezet waar je de eerstkomende jaren verder niet meer naar omkijkt. Je neemt er dus geen geld van op en stort er ook niets bij. De rente die de bank geeft op het bedrag dat op deze spaarrekening staat is 2,5% per jaar.

a Hoeveel geld staat er na 5 jaar op deze bankrekening als de bank op dat moment alle opgebouwde rente bijschrijft?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En waarom zal het saldo na 5 jaar wel niet precies het bedrag bij a zijn als de bank jaarlijks rente bijschrijft?

c Stel je voor dat de bank maandelijks rente bijschrijft op deze rekening. Hoeveel bedraagt dan de maandrente als de jaarrente 2,5% is?

Opgave 7

Paracetamol is het wereldwijd meest gebruikte pijnstillende en koortsverlagende middel. Het wordt onder andere verkocht in pillen van 500 mg. Na inname in het lichaam (een pilletje paracetamol slikken) wordt deze stof ook weer langzaam afgebroken. De halveringstijd is (afhankelijk van de omstandigheden) ongeveer 3 uur.

Figuur 2

a Hoeveel uur na inname is nog 12,5% van de paracetamol in het lichaam over?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur in drie decimalen nauwkeurig? En het afnamepercentage per uur?

Als de hoeveelheid paracetamol in je lichaam onder de 50 gram is, gaat er geen werking meer van uit.

c Je slikt twee paracetamolpillen van 500 gram. Na hoeveel uur zijn ze uitgewerkt?

Opgave 8

Samoa is een republiek in Polynesië die bestaat uit de westelijke Samoa-eilanden. In 2006 bedroeg het aantal inwoners volgens een officiële volkstelling 179186. N is het aantal inwoners van Samoa afgerond op honderdtallen en t is de tijd in jaren vanaf 2006.
Het aantal inwoners werd voor het jaar 2012 geschat op 194300.

a Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor N afhankelijk van t?

b Ga na dat bij de gegevens ook exponentiële groei past met een percentage van ongeveer 1,36% per jaar.

c Welke formule geldt voor N afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?

d Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal inwoners van Samoa voor het eerst de 200000 zal overschrijden.

Opgave 9

In 2000 was het aantal inwoners van het werelddeel Afrika ongeveer 872 miljoen en in 2010 was dit aantal ongeveer 1138 miljoen. Het aantal inwoners groeide exponentieel.
Azië had in 2000 meer inwoners, namelijk 3864 miljoen, maar het groeipercentage was 1,5% per jaar.

In welk jaar zal - mits de groei zo door gaat - het aantal inwoners van Afrika dat van Azië zal gaan overstijgen? Schrijf de bijbehorende ongelijkheid op.

Opgave 10

Een pakje boter wordt in de koelkast geplaatst. Daardoor daalt de temperatuur van de boter. Neem aan dat voor die temperatuur geldt $T = 14 \cdot 0{,}8^t + 6$, met t in minuten en T in °C.

a Hoeveel bedroeg de temperatuur van de boter voordat ze in de koelkast werd geplaatst?

b Hoeveel bedraagt de temperatuur in de koelkast?

c Teken een grafiek van T als functie van t.

d Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de boter minder dan 1 °C van de temperatuur binnen de koelkast verschilt.

Opgave 11

Bij een exponentiële functie hoort een formule van de vorm $y = 20 \cdot g^t + a$. De grafiek gaat door de punten $A(0{,}30)$ en $B(10{,}12)$.

Bereken a en benader g in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Bij de rente die je van de bank krijgt op een spaartegoed speelt exponentiële groei een rol. Door het bijschrijven van rente verandert namelijk je spaartegoed en daar krijg je ook weer rente over. Er is sprake van 'rente op rente'. Je geld stoppen in een spaarvarken is dus geen goed idee...

Stel je zet op de eerste dag van deze maand € 1000,= op een spaarrekening waarop je 3% rente per jaar krijgt. Dan maakt het wel wat verschil of de bank de rente maandelijks bijschrijft of jaarlijks, of pas als je de spaarrekening weer opheft en leeghaalt. Je kunt dat zelf narekenen...

Figuur 3

Opgave 12: Rente op rente

Gebruik de gegevens uit de tekst in **Toepassen**.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar van je spaartegoed? En hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

b Als de bank maandelijks rente bijschrijft en het rentepercentage per maand op één decimaal nauwkeurig afrondt, hoeveel bedraagt je spaartegoed dan na een jaar? En hoeveel zou het moeten bedragen?

c En als de bank het rentepercentage op twee decimalen nauwkeurig berekent en maandelijks rente bijschrijft. Wie wordt er nu blij, jij of de bank?

d Doe de berekening uit c nog eens, maar neem nu aan dat de bank niet afrondt, maar gewoon de decimalen na de tweede weglaat bij het berekenen van het rentepercentage. (Dat heet ‘afkappen’.)

Opgave 13: Tussentijdse stortingen

Gebruik weer de gegevens uit de tekst in **Toepassen**.

Nu stort je zelf maandelijks nog € 25,= op je spaarrekening, te beginnen op de eerste dag van de volgende maand.

Bereken je spaartegoed na een jaar sparen. Ga uit van een maandrente van 0,24%.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.