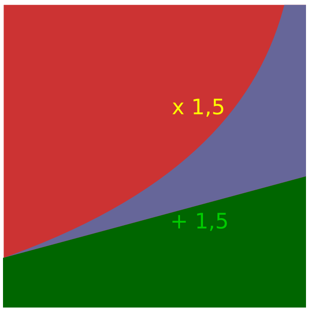
3.2 Exponentiële groei

Inleiding

Het maakt veel verschil of iets elke tijdseenheid bij een bepaalde hoeveelheid 1,5 wordt opgeteld of dat die hoeveelheid met 1,5 wordt vermenigvuldigd. Lineaire groei is zeer gelijkmatig. Exponentiële groei wordt steeds extremer, het is min of meer explosieve groei.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken;
- een formule opstellen bij exponentiële groei als twee punten van de grafiek bekend zijn.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Verkennen

Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer 9,5 miljoen inwoners. Dit aantal groeit exponentieel met een groeifactor van 1,045 per jaar.

a In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld?

Noem het aantal inwoners in miljoenen A en laat t de tijd in jaren na 2005 zijn.

b Welke formule kun je dan opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?

c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Figuur 2

Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 1995 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat.
Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan $200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$.
In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat.

Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1{,}05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden.
Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van 1,05 per jaar.

Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan A het aantal leden in land A, B het aantal leden in land B en t de tijd in jaren na 2010.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

a Welke formule kun je opstellen voor A afhankelijk van t?

b Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.

c Stel een formule op voor A afhankelijk van t.

d Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.

Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

a Teken de grafieken van A en B in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.

b In welk jaar zijn er in land B meer leden van voetbalclubs dan in land B?

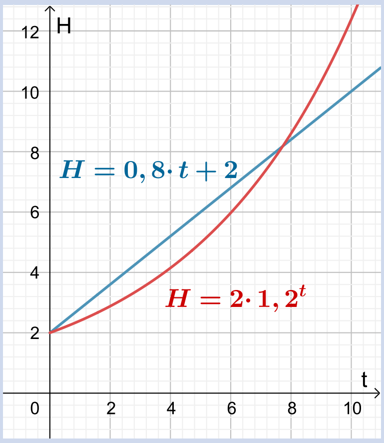
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: lineaire en exponentiële groei

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid b en een vaste toename per eenheid van a.
  Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
  Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal a.
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid b en een vaste groeifactor per eenheid van g.
  Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
  Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0,b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0,b)$ als $0 < g < 1$.



Figuur 3

Bij lineaire groei met een vaste toename van 0 spreek je van een **constante functie**. En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor 1.

Als bij exponentiële groei twee punten van de grafiek bekend zijn, kun je de groeifactor berekenen door de uitkomsten te delen. Als het bijbehorende tijdsverschil t is, dan is de groeifactor de $t$de machtswortel daarvan. Daarmee kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met 2,6% toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.
Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op. Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is 1,026. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534. Is het aantal zeehonden Z en de tijd in maanden t dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1{,}026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeit.

a Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?

c Stel een formule op voor het aantal zeehonden Z afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.

d Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

Opgave 4

In de **Theorie** zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

a Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1{,}10^t$ en $H_2 = 0{,}6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

b Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

c Als je de groeifactor van H_1 verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?

d Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0{,}80^t$ en $H_2 = -0{,}5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

e Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwonersaantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren. Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben." De burgemeester mw. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

a Maak nu grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mw. Jansma.

b Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

c Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

d Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.

e Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van A dat van B overschrijden als de groei zo door gaat?

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
aantal inwoners A	79600	81100	82600	84200	85600	87100	88500	90100	91600
aantal inwoners B	72100	73900	75800	77600	79600	81600	83600	85700	87800

Tabel 1

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin A het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor 1,025. Er geldt $B = 72100 \cdot 1{,}025^t$ waarin B het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad A meer inwoners heeft dan stad B.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.

b Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

c Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.

d Hoe leid je voor stad B de formule af uit de tabel?

e Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van A dat van B gaat overschrijden als de groei zo door gaat.

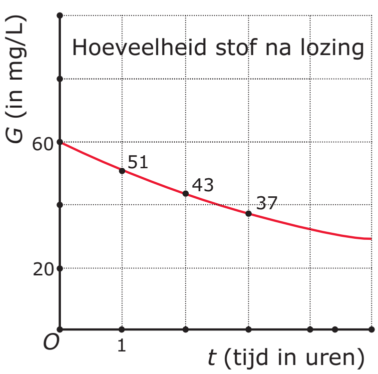
Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif G (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. Er lijkt sprake te zijn van exponentieel verval.

a Leg uit waarom er sprake lijkt te zijn van exponentieel verval.

b Leid een formule af voor G afhankelijk van t.

c Na hoeveel uur is er minder dan 1% van deze giftige stof over?



Figuur 4

Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid N is het volgende gegeven:
Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor N als functie van t er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor g per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800/1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor g vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.

Je vindt $g = \sqrt[8]{\frac{2}{3}} \approx 0{,}95$.
Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0{,}95^t$.
Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid b te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$.
Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0{,}95^t$.

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid N wordt gevonden op basis van de waarden van N op twee verschillende tijdstippen.

a Benader zelf met je rekenmachine de groeifactor per tijdseenheid.

b Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.

c Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

Opgave 9

Bij de gegevens in **Voorbeeld 3** past ook een lineaire formule voor N als functie van t.

a Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

b Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van N als $t = 20$.

c Bij de lineaire functie is de hoeveelheid N op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?

d Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid N ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 10

Een hoeveelheid H heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor H afhankelijk van t (in dagen) en bereken de waarde van H op $t = 10$ in gehelen nauwkeurig.

a H neemt dagelijks toe met 15%.

b H neemt dagelijks toe met 15.

c H neemt dagelijks af met 15%.

d H neemt dagelijks af met 15.

e H neemt wekelijks toe met 15%.

f H neemt wekelijks af met 15%.

Opgave 11

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

jaartal	bevolking
2008	154000
2009	156300
2010	158700
2011	161000

Tabel 2

Eén van de medewerkers zegt: "Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo'n 2300 inwoners bijkomen."

a Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.

b Neem aan dat t de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners I volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: "Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar."

c Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.

d Welke formule kun je opstellen voor I als functie van t uitgaande van deze exponentiële groei?

e Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?

f Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

Opgave 12

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt 32,7% van het blauwe licht tegengehouden door het water.

Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?

Figuur 5

Opgave 13

Hieronder worden telkens twee punten gegeven van een grafiek van y als functie van x. Geef bij elk geval zowel een formule van een passende lineaire functie als van een passende exponentiële functie.

a De grafiek gaat door (0,3) en (1,4).

b De grafiek gaat door (0,3) en (1,2).

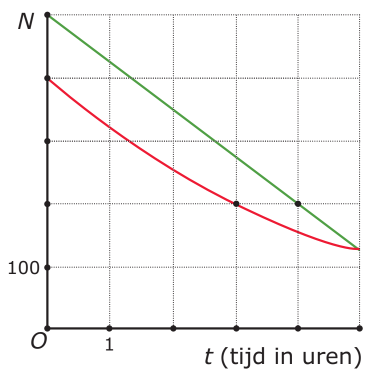
c De grafiek gaat door (2,150) en (12,389).

d De grafiek gaat door (2,389) en (12,150).

Opgave 14

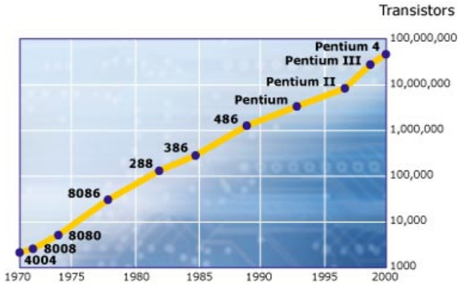
Hiernaast zie de grafieken van een lineair en exponentieel verband.

Geef bij beide grafieken een passende formule.



Figuur 6

Toepassen



Figuur 7

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. Het komt uit een Amerikaans tijdschrift en symboliseert de 'wet van Moore'. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde 'processor' (een minuscuul printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...
Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terecht komen.

Maar niet alleen de rekenkracht van van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het lijkt erop dat de grenzen van die groei in zicht komen...

Opgave 15: De wet van Moore

Bekijk de figuur in **Toepassen**.

Figuur 8

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2300 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

a In 1992 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?

b In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?

Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat R die rekenkracht voorstelt afhankelijk van t het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2300$.

c Stel een formule op voor R als functie van t.

d Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.

e Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.

Opgave 16: Facebook

Uit **Wikipedia, december 2012**:
"In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. Anno 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers."

a Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.

b Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

Testen

Opgave 17

De gemeente G had een bevolking van 18000 mensen in begin 2015 en kreeg er dat jaar 540 mensen bij. Dat is een toename van 3% in dat jaar. Noem het aantal inwoners van deze gemeente N met t de tijd in jaren na 2015.

a Welke formule geldt voor N als er daarna jaarlijks (ongeveer) evenveel mensen bijkomen?

b Welke formule geldt voor N als er daarna jaarlijks (ongeveer) 3% mensen bijkomen?

c Voorspel met beide formules het aantal inwoners van de gemeente G in 2025.

Opgave 18

Een groeigrafiek waarbij y afhankelijk is van t.
Deze grafiek gaat door (2,300) en (6,200).

a Stel een formule op voor y uitgaande van lineaire groei?

b Stel een formule op voor y uitgaande van exponentiële groei?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.