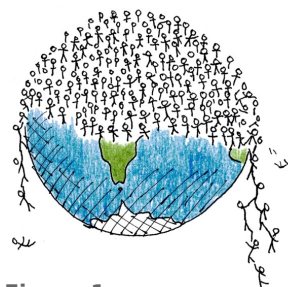


3.1 Groeifactoren

Inleiding

Soms groeien hoeveelheden steeds sneller.

Dat was tot nu toe het geval met de wereldbevolking. In 1800 waren er ongeveer 1 miljard mensen, maar in 2011 ging het aantal over de 7 miljard heen. Dat bereik je al met een groeipercentage van 1 % per jaar.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met de begrippen groeifactor, groeipercentage, vervalpercentage, verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Verkennen

Opgave V1

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.

- Bereken de bandenspanning na 1 dag en na 2 dagen.
- Hoe kun je de antwoorden bij a vinden door vermenigvuldigen? En waarmee dan?
- Na hoeveel dagen is de bandenspanning gehalveerd?



Figuur 2

Uitleg

Een scholengemeenschap heeft in een groeigemeente in het jaar 2012 in totaal 800 leerlingen. Het aantal leerlingen van de scholengemeenschap neemt elk jaar met 12% toe. Naar verwachting zal deze groei zich nog enkele jaren voortzetten. De school heeft plaats voor maximaal 1250 leerlingen. Om uit te rekenen wanneer de school noodlokalen moet laten plaatsen kun je per jaar het aantal leerlingen uitrekenen.

Dit kan als volgt:

In 2012 is het leerlingenaantal 800.

In 2013 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 = 896$.

In 2014 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^2 \approx 1004$.

In 2015 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^3 \approx 1124$.

In 2016 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^4 \approx 1259$.

In 2015 moeten er dus extra noodlokalen komen om in 2016 voldoende plaatsen te hebben. Het getal 1,12 waar je steeds mee vermenigvuldigt, noem je de **groeifactor per jaar**.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- a Hoe kom je aan het getal 1,12?
- b Stel dat het aantal leerlingen van de scholengemeenschap in 2012 in totaal 696 was. Wanneer moeten de noodlokalen dan komen?
- c Stel dat de groeifactor per jaar 1,08 is. Hoeveel procent neemt het aantal leerlingen per jaar dan toe?
- d Als van een school het aantal leerlingen jaarlijks niet toeneemt, maar met een vast percentage afneemt, wat weet je dan van de groeifactor per jaar?

Opgave 2

Medicijnen worden door het lichaam opgenomen en vervolgens afgebroken. Dit gaat meestal ook met een vast percentage. Van paracetamol wordt elk uur 15% afgebroken. Stel dat Piet hoofdpijn heeft en een tablet met 500 mg paracetamol inneemt. Het medicijn is uitgewerkt als de hoeveelheid paracetamol in het lichaam onder de 100 mg komt.

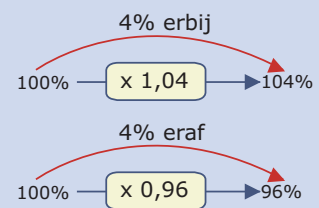
- a Hoeveel procent van de paracetamol is na 1 uur nog over?
- b Hoeveel milligram paracetamol is dat?
- c Welke groeifactor per uur hoort er bij de afbraak van de paracetamol door het lichaam?
- d Na hoeveel uur is deze stof uitgewerkt? (Geef je antwoord in gehele uren.)

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wordt een hoeveelheid per tijdseenheid (dus bijvoorbeeld steeds per seconde) met een vaste **groeifactor** g vermenigvuldigd. Als $g > 1$ dan is er sprake van een toename en als $0 < g < 1$ dan is er sprake van een afname. Als $g = 1$ dan is er geen sprake van een toename of afname maar blijft de hoeveelheid steeds constant.

- Bij een groeifactor van 1,04 hoort een **groeipercentage** van 4%.
- Bij een groeifactor van 0,96 hoort een **groeipercentage** van -4% of een **vervalpercentage** van 4%.



Figuur 3

Bij een groeifactor per uur van 1,04 hoort een groeifactor per dag van $1,04^{24} \approx 2,56$.

De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van 2. De **halveringstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van 0,5.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groeipercentage naar een groeifactor.

- Bij een groei van 15% per jaar neemt 100 elk jaar toe tot 115. Er is een groeifactor van $115/100 = 1,15$ per jaar.
- Bij een afname van 17% per maand neemt 100 elke maand af tot 83. Er is een groeifactor van $83/100 = 0,83$ per maand.

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groeifactor naar een groeipercentage.

- Bij een groeifactor van 1,20 per jaar neemt 100 elk jaar toe tot $100 \cdot 1,20 = 120$. Er komt dus jaarlijks $120 - 100 = 20\%$ bij.
- Bij een groeifactor van 0,76 per dag neemt 100 elke dag af tot $100 \cdot 0,76 = 76$. Er gaat dus jaarlijks $100 - 76 = 24\%$ af.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je kunt omrekenen van een procentuele toename of afname naar een groeifactor.

- a Bij het omrekenen wordt steeds van 100 uit gegaan. Is het ook mogelijk om van een ander getal uit te gaan? Licht je antwoord toe.
- b Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?
- c Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?
- d Een hoeveelheid neemt elke minuut met 0,1% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?
- e Een hoeveelheid neemt elke minuut met 0,1% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?
- f Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?
- g Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

Opgave 4

Een groeipercentage kan zowel positief als negatief zijn.

- a Waar in **Voorbeeld 1** is sprake van een negatief groeipercentage?
- b Waarom kan een groeifactor nooit negatief zijn?
- c Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1,5 per uur?
- d Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 0,15 per uur?
- e Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1 per jaar?
- f Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 2 per jaar?

Opgave 5

Geef bij de volgende groeifactoren per week aan met welk percentage de hoeveelheid toe- of afneemt elke week.

- a 1,105
- b 0,998
- c 4
- d 0,1

Voorbeeld 2

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van 0,6. Als het promillage lager is dan 0,5 mag hij weer rijden. Hoe lang moet Jelte wachten?

Antwoord

De groeifactor is 0,91 per half uur.

Om 01:30 uur had hij een promillage van: $0,6 \cdot 0,91 = 0,546$.

Om 02:00 uur had hij een promillage van: $0,6 \cdot 0,91^2 \approx 0,497$.

Om iets voor twee uur mag Jelte weer verder rijden.



Figuur 4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Waarom is de groeifactor per half uur 0,91?
- Hoeveel zou in dit geval de groeifactor per uur zijn? Hoe kun je dit afleiden uit het voorbeeld?
- Hoeveel zou de groeifactor per kwartier bedragen? Waarom?

Opgave 7

Bij een zwaarder persoon wordt de alcohol langzamer afgebroken. Stel dat iemand's alcoholpromillage elk half uur met 5% afneemt. Hij mag rijden als dit promillage onder de 0,5 zit.

Hoe lang duurt voordat deze persoon mag rijden nadat hij op zeker moment een alcoholpromillage van 1,0 heeft? (Dat promillage heeft iemand van 70 kg twee uur nadat hij zeven biertjes in een uur heeft gedronken.)

Voorbeeld 3

In een vijver groeit een **witte waterlelie**. De **verdubbelingstijd** van de oppervlakte van de waterlelie op de vijver is 24 uur. Na 20 dagen is de hele vijver bedekt. Na hoeveel dagen was de helft van de vijver bedekt door de waterlelie? En wanneer werd 10% van de vijver door de waterlelie bedekt?

Antwoord

De groeifactor per 24 uur is 2.

Aangezien de bedekte oppervlakte steeds verdubbelt is dus de vorige dag (dag 19) de helft van de vijver bedekt. Op dag 18 dus 25% en op dag 17 12,5% gevolgd door 6,25% op dag 16. De 10% wordt dus bereikt in de loop van dag 16.



Figuur 5

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 3** de groei van de oppervlakte die door de witte waterlelie wordt bedekt.

- Waarom is de groeifactor per etmaal gelijk aan 2?
- Het is in dit voorbeeld niet nodig om de grootte van de vijver of de waterlelie precies te weten. Waarom niet?
- Stel dat de vijver een oppervlakte heeft van 150 m^2 . Hoe groot was de door de waterplant bedekte oppervlakte dan op dag 19?
- En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 10?
- En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 1, als de plant begint te groeien? Als g de groeifactor per uur is, dan geldt $g^{24} = 2$.
- Bereken de groeifactor per uur in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Een bepaalde stof wordt in water afgebroken. De halveringstijd van de hoeveelheid H (in mg/L) van die stof bedraagt 8 uur.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per dag?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per uur?

Verwerken

Opgave 10

Bepaal bij de volgende groeifactoren per uur het toe- of afnamepercentage per uur.

- a 1,21
- b 1,924
- c 0,99
- d 2,5
- e 100

Opgave 11

Zet de onderstaande toe- of afnamepercentages om naar groeifactoren.

- a Een afname van 14% per uur.
- b Een toename van 34,76% per dag.
- c Een toename van 104% per jaar.
- d Een afname van 100% per uur.

Opgave 12

Banden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De bandenspanning van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.

- a Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?
- b Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning?
- c Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 0,1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?

Opgave 13

Het aantal WhatsApp-berichten W nam in de beginjaren flink toe. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten W in miljoenen):

jaartal	2005	2006	2007	2008
W	4,9	9,8	19,6	39,2

Tabel 1



Figuur 6

- a Met welke groeifactor per jaar neemt W in die periode toe? Hoe groot was toen de verdubbelingstijd van het aantal WhatsApp-berichten per jaar?
- b Met hoeveel procent nam het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?
- c Hoeveel van deze berichten verwacht je dan in 2012?
- d En hoeveel van deze berichten verwacht je in 2022 als de groei zo door gaat? Is dat realistisch?

Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

- a Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstillers elke 12 uur af?
- b Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstillers elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?
- c Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstillers elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?

- d Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?
- e Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.
- f Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

Toepassen

Je hebt al gezien dat exponentiële groei veel voorkomt in de praktijk. Vooral natuurbeschermers en landschapsbeheerders hebben regelmatig te maken met de problemen die dit kan veroorzaken. Maar ook veel toekomst voorspellende scenario's en historici maken gebruik van exponentiële groei.

De **Club van Rome** is een voorbeeld van een groep wetenschappers en milieu-activisten die al zo'n 50 jaar geleden probeerde met behulp van groeimodellen te voorspellen hoe de wereld zich in de toekomst zou gaan ontwikkelen. Beroemd is hun rapport 'Grenzen aan de groei' uit 1972.



Figuur 7

Opgave 15: Vossen en konijnen

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

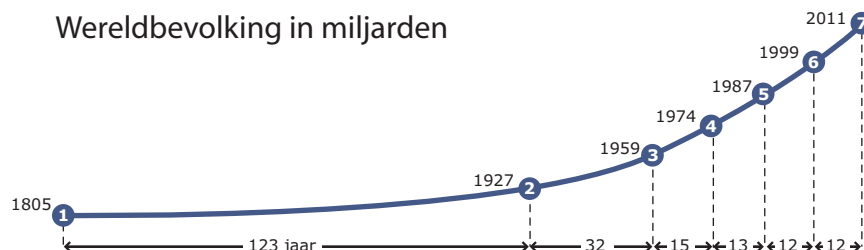
jaartal	2005	2006	2007	2008	2009
aantal konijnen	1450	1261	1097	954	830

Tabel 2

- a Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?
Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.
- b Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?

Opgave 16: De wereldbevolking

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denken aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.



Figuur 8

- a Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer 0,56% per jaar toenam. Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.
- b Met hoeveel procent per jaar ongeveer?
- c Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.

- d** Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

Testen

Opgave 17

Neem aan dat de wereldbevolking in 1800 precies 1 miljard mensen telde. En dat in de 200 jaar daarna de groei 1% per jaar bedroeg.

- a** Hoe groot is dan de groeifactor per jaar?
- b** Laat zien, dat de verdubbelingstijd van de wereldbevolking dan ongeveer 70 jaar is.
- c** Hoeveel zou het aantal mensen in het jaar 2000 moeten bedragen?
- d** Hoeveel zou het groeipercentage per eeuw (100 jaar) zijn?

Opgave 18

Paracetamol is een nogal veel gebruikte pijnstiller. Het lichaam breekt de werkzame stof af met een halveringstijd van ongeveer 3 uur. Iemand neemt een pilletje paracetamol van 500 mg.

- a** Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur van deze paracetamol?
- b** Hoeveel bedraagt het vervalpercentage per uur van deze paracetamol?
- c** Hoeveel paracetamol zit er dan na 4 uur nog in haar lichaam?



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
