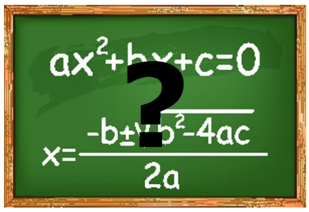
2.4 Handig oplossen

Inleiding

In het voorgaande onderdeel heb je geleerd de abc-formule te gebruiken. Daarmee kun je elke kwadratische vergelijking oplossen.
Waarom dan toch nog kijken naar andere manieren om dit te doen? Welnu, de abc-formule is vaak nogal onhandig in gebruik, er zijn snellere methoden. Dus nu ga je proberen om kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk op te lossen. Niet altijd maar domweg de abc-formule toepassen, maar eerst even kijken of het niet sneller kan...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk oplossen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- bij kwadratische functies de top en de nulpunten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ oplossen.

Doe dit op zoveel mogelijk verschillende manieren. Welke manier is het handigst?

Opgave V2

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = 0$ oplossen.

Laat zien hoe je dit op de handigste manier kunt doen.

Uitleg

De vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ kan op meerdere manieren opgelost worden.
Allereerst merk je op dat het een kwadratische vergelijking en een drieterm is. Je herleidt dan eerst op 0:

$2x^2 + 12x + 10 = 0$

Je kunt nu de abc-formule gebruiken om de vergelijking op te lossen. Maar delen door 2 maakt hem in ieder geval eenvoudiger:

$x^2 + 6x + 5 = 0$

Nog steeds kun je de abc-formule toepassen, of je kunt een kwadraat afsplitsen, maar nu is ontbinden met de som-en-product-methode handiger.

Bij drietermen kies je meestal voor ontbinden (als je snel een ontbinding ziet) of anders voor de abc-formule. Maar hoe werk je bij een tweeterm?
Stel je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = 0$ oplossen.
De abc-formule kan natuurlijk met $a = 2$, $b = 12$ en $c = 0$. Maar dat is wel erg onhandig. Gewoon de GGD buiten haakjes halen gaat echt veel sneller...

Opgave 1

Kwadratische vergelijkingen kun je beter niet altijd met de abc-formule oplossen. Die formule is als het ware de laatste mogelijkheid als je geen snellere manier kunt vinden.

a Bekijk eerst de vergelijkingen in de **Uitleg**. Als je deze vergelijkingen nog niet hebt opgelost, doe dit dan alsnog.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 = 4x - 6$.

b Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm?

c Kun je deze vergelijking oplossen door ontbinden in factoren? Los de vergelijking verder op.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 = 4x - 5$.

d Waarom kun je deze vergelijking alleen met de abc-formule oplossen? Laat zien hoe je dat doet.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 - 4x = 5x$.

e Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm? En gebruik je dan de abc-formule?

f Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 2

Zoek bij de volgende vergelijkingen steeds de handigste manier van oplossen. Bereken vervolgens de exacte oplossingen.

a $0{,}1x(x - 2) = 1$

b $0{,}1(x - 2)^2 = 1$

c $0{,}1x(x - 2) = 0$

d $0{,}1x(x - 1) = 2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een kwadratische vergelijking (of tweedegraads vergelijking) kun je op meerdere manieren oplossen. De abc-formule lukt altijd als je hem in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ hebt geschreven (met $a \neq 0$). Maar regelmatig is de abc-formule niet nodig. Hier zie je welke keuzes je daarbij kunt maken.

- Komt de variabele maar op één plaats voor?
  Ga dan terugrekenen, met name worteltrekken.
- Heeft de vergelijking de vorm van een ontbinding die op 0 uitkomt?
  Splits de vergelijking dan in twee eenvoudiger vormen.
- Komen er in de vergelijking haakjes voor, maar kun je niet meteen ontbinden in factoren?
  Werk dan eerst de haakjes uit.
- Kun je na op 0 herleiden alle termen door hetzelfde getal delen?
  Doe dit dan en maak de vergelijking eenvoudiger.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen ontbinden in factoren?
  Doe dit dan en lees de oplossing uit de ontbinding af.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen niet ontbinden in factoren?
  Gebruik de abc-formule of splits een kwadraat af.

Als je deze stappen in deze volgorde doorloopt, kun je elke kwadratische vergelijking op zo handig mogelijke manier oplossen.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een drietal kwadratische vergelijkingen die op elkaar lijken.

- $(x-2)(x+3)=6$
- $(x-2)(x+3)=7$
- $(x-2)(x+3)=0$

Van welke van deze vergelijkingen kun je de oplossingen ‘zo zien’? En welke kun je alleen oplossen met de abc-formule?

Antwoord

In de **Theorie** vind je een lijstje met keuzes die je kunt maken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Dit lijstje kan je helpen bij het beantwoorden van de vragen hierboven.

Bij geen van deze vergelijkingen komt de variabele op één plek voor, dus terugrekenen is nu onmogelijk. De derde vergelijking bestaat echter uit een ontbinding waar 0 uit komt. Die kun je dus heel snel oplossen door hem te splitsen in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Bij beide andere vergelijkingen moet je eerst de haakjes wegwerken en op 0 herleiden. Dan zul je zien dat bij de tweede vergelijking de abc-formule nodig is. Of je moet een kwadraat afsplitsen, dat werkt ook altijd wel...

Opgave 3

Bekijk de drie vergelijkingen in **Voorbeeld 1**.

a Ga na, dat je van de derde vergelijking inderdaad vrijwel direct de oplossing kunt opschrijven.

b Los nu de eerste vergelijking zo handig mogelijk op.

c Los ook de tweede vergelijking op.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $(2x-7)^2-1=9$ oplossen.

a Waarom is nu het wegwerken van de haakjes niet handig?

b Los nu deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen op de handigste manier op.

a $3x^2+6x=9$

b $15t(t-1)=30$

c $\frac{1}{2}x^2=32$

d $\frac{1}{4}p^2=3p$

e $(a-4)^2-8=5$

f $4t+1=6t^2$

g $(x-2)(x+2)=1$

h $x^2=2x-1$

Voorbeeld 2

Bereken de oplossing van de vergelijking $(p + 2)^2 = (5 - 2p)^2$.

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en dan ontbinden of de abc-formule toepassen?
De oplossing hieronder is dan totaal anders, echt ‘out-of-the-box’ denken.

Beide zijden worteltrekken geeft:

$p + 2 = 5 - 2p \vee p + 2 = -(5 - 2p)$

Dit zijn twee lineaire vergelijkingen die je met de balansmethode kunt oplossen.
Je krijgt: $p = 1 \vee p = 7$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

a Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes weg te werken.

b Los nu de vergelijking op de manier van het voorbeeld op.

Opgave 7

Los op:

a $(x + 1)^2 = (2x + 4)^2$

b $(x - 2)^2 = (-x + 3)^2$

c $(2a - 2)^2 = 36$

d $(5 + 3{,}5k)^2 = k^2$

Voorbeeld 3

Bereken de oplossing van de vergelijking $2x(x + 4) = 3x + 12$.

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en daarna ontbinden of de abc-formule toepassen?
De oplossing hieronder is dan totaal anders, alweer ‘out-of-the-box’ denken.

Schrijf de vergelijking als:

$2x(x + 4) = 3(x + 4)$

Omdat beide zijden van de vergelijking nu een factor $x + 4$ bevatten, kun je hem direct splitsen in:

$2x = 3 \vee x + 4 = 0$

En de oplossing wordt $x = 1{,}5 \vee x = -4$.

Dat gaat een stuk sneller dan haakjes wegwerken, op 0 herleiden en dan de abc-formule...

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

a Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes weg te werken.

b Bekijk nu de manier van oplossen die in het voorbeeld wordt gebruikt. Waarom mag je niet gewoon beide zijden delen door $x + 4$?

c Wanneer kun je deze handige oplossingsmethode toepassen?

Opgave 9

Los op:

a $5x(x-3) = 6x - 18$

b $x(x+1) = 5x$

c $x^2 = 6x$

d $(4x+1)(2x-5) = x(2x-5)$

Verwerken

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $x^2 = x$

b $(x-1)^2 - 1 = 0$

c $5 - x^2 = 3$

d $x - x^2 = 0$

e $x - x^2 = 5$

f $x^2 + 2x - 7 = 3$

g $x^2 + 2x + 1 = 0$

h $(x+3)(x-3) = 9$

i $(x-4)(x+5) = 6$

j $x(2-x) = 3x$

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $(2x-3)(x-1) = 3$

b $(2x-3)(x-1) = 0$

c $(s-3)^2 + 5 = 0$

d $4(s+1)^2 - 7 = 2$

e $t - (t-1)^2 = \text{-}4$

f $(x-2)^2 = (4-3x)^2$

g $3(x-1)^2 = (x-1)^2$

h $3p(p-1) = (p+1)(p-1)$

i $(x-4)^2 = 5 - x$

j $0{,}5x^2 - 4x = 10$

Opgave 12

Een parabool wordt beschreven door de formule $y = 0{,}25(x-2)^2 + 5$. Een lijn gaat door de punten $A(0,6)$ en $B(10,12)$. De snijpunten van deze lijn en deze parabool zijn A en C.

Bereken de coördinaten van punt C.

Opgave 13

Een bedrijf maakt Blu-ray spelers. De winst die het bedrijf per week maakt wordt berekend met de formule $W = -6q^2 + 100q - 246$. De winst (W) is hier in duizenden euro en het aantal per week verkochte spelers (q) in honderdtallen.

Figuur 2

a Bereken voor welke waarden van q winst wordt gemaakt. Om welke aantallen Blu-ray spelers gaat het daarbij?

b Bij welk aantal wekelijkse verkochte Blu-ray spelers is de winst zo groot mogelijk? Hoe groot is deze maximale winst?

Toepassen

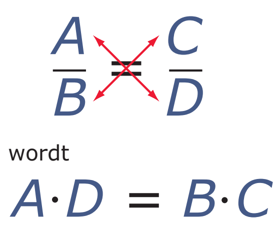
Je hebt in deze paragraaf enkele handige manieren van het oplossen van vergelijkingen gezien. Vrijwel altijd waren dat kwadratische vergelijkingen. Maar deze technieken zijn veel vaker te gebruiken. Vooral voor leerlingen die in de bovenbouw met wiskunde B verder willen zijn handige oplossingstechnieken onontbeerlijk.

Eén van de belangrijkste **handige oplossingsmethoden** is het ontbinden in factoren. Dat doe je ofwel door de grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, ofwel met behulp van de som-en-productmethode. Je schrijft daarmee de vergelijking in de vorm $A \cdot B = 0$ met oplossing $A = 0 \vee B = 0$.

Maar in een paar situaties kun je nog snellere oplossingsstappen afleiden:

- Een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ wordt $A = 0 \vee B = C$.
- Een vergelijking van de vorm $A^2 = B^2$ wordt $A = B \vee A = -B$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ wordt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ wordt $A = 0 \vee B = C$ mits $B \neq 0$ en $C \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ wordt $A = C$ mits $B \neq 0$.

De derde techniek noem je wel **kruislings vermenigvuldigen**. In de figuur hiernaast zie je waarom. Let er wel op dat delen door 0 niet mag!



Figuur 3

Opgave 14: Handige oplossingstechnieken

Bekijk in **Toepassen** hoe je vergelijkingen handig kunt oplossen door ontbinden en worteltrekken. Je kunt daaruit nog weer snellere stappen afleiden.

a Welk voorbeeld maakt gebruik van de strategie dat een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ kan worden geschreven als $A = 0 \vee B = C$? Laat zien hoe deze aanpak volgt uit ontbinden in factoren.

b Laat ook zien, dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ kan worden geschreven als $A \cdot D = B \cdot C$.

c Leid zelf af dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ kan worden herleid tot $A = 0 \vee B = C$

Opgave 15: Vergelijkingen met hogere machten

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

a $x^3 = 4x$

b $3x^2(x - 5) = x^2$

c $4(x - 1)^3 = x - 1$

d $\left(x^2 + 1\right)^2 = 4$

e $\left(2x + x^2 - 4\right)^2 = (x + 1)^2$

Opgave 16: Vergelijkingen met breuken

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

a $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{2x+3}$

b $\frac{x}{2x-1} = \frac{2x}{1-x}$

c $\frac{2x-1}{3x} = \frac{2x-1}{x+2}$

d $\frac{x-2}{2x} = \frac{5}{2x}$

e $\frac{1-x}{2x} = 1 - \frac{2}{x}$

f Je kunt nog meer gebroken vergelijkingen oefenen via **Practicum**.

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig

a $x^2 - 3x = 4$

b $(2x+3)(x-5) = 0$

c $(2x+3)(x-5) = -15$

d $3(x+2)^2 = 15$

e $3(x+2)^2 = 15x$

f $3(x-2)^2 = 12x^2$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het handig oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.