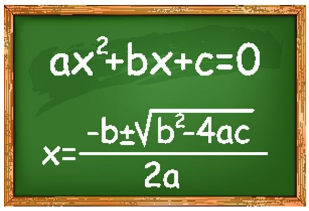
2.3 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding

Zo'n 1200 jaar geleden bedacht de Perzische wiskundige **Al-Khwarizmi** een oplossing voor alle kwadratische vergelijkingen. Die oplossing heet tegenwoordig de abc-formule. Je ziet hem hier in moderne notatie.
Je moet van een gegeven vergelijking alleen de waarden van a, b en c aflezen en die invullen in de oplossingsformule en klaar.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- alle kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische functies (met een geschikte formule) de top en de nulpunten bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x + 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 7 = 0$ oplossen.

Kun je deze vergelijking exact oplossen?

Uitleg

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2+bx+c = 0$ heet een 'kwadratische vergelijking' of ook wel 'tweedegraads vergelijking' (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Soms kun je een kwadratische vergelijking oplossen, bijvoorbeeld door ontbinden of door terugrekenen. Maar dat lukt lang niet altijd. Wiskundigen hebben zich al honderden jaren geleden over dit probleem gebogen. Ze hebben de **abc-formule** gevonden:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $a \neq 0$.

Als je nu $x^2 + 6x + 7 = 0$ wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af $a = 1$, $b = 6$ en $c = 7$. Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$x = \frac{-6+\sqrt{6^2-4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-6-\sqrt{6^2-4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$

ofwel:

$x = \frac{-6+\sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6-\sqrt{8}}{2}$

Het is handiger om de vorm $b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat afzonderlijk te berekenen. Je noemt deze uitdrukking de 'discriminant' $D = b^2 - 4ac$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

a Los zelf de vergelijking $x^2 + 6x + 7 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

b Geef benaderingen van beide x-waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

In **Opgave V1** werd de oplossing van $x^2 + 6x + 8 = 0$ gevraagd.

c Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de abc-formule. Ga na, dat je oplossing overeen komt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

d Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?

e Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

a $x^2 + 12x + 4 = 0$

b $2x^2 + 5x - 10 = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 17 - 10x$

e $2x^2 + 16 = 12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Opgave 3

Bekijk in de **Uitleg** wat de discriminant van een kwadratische vergelijking is.

Bekijk de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

a Bereken de discriminant van deze vergelijking.

b Bereken vervolgens de oplossing.

c Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$.

d Bereken eerst de discriminant. Leg uit dat je aan de discriminant kunt zien dat de oplossing van de vergelijking maar één waarde heeft. Bereken vervolgens die éne oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.

e Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

a $2x^2 + 5x - 20 = 0$

b $11 + 3x^2 = 9x$

c $3x^2 = 4x - 1$

d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2+bx+c=0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$ met $a \neq 0$ is

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe $ax^2+bx+c=0$ in algemene zin oplossen. Je schrijft die formule daartoe eerst in de vorm $a(x-p)^2+q=0$ waarin (p,q) de top van de parabool is.

Die top ga je eerst berekenen. Daartoe bepaal je de symmetrieas. Deze lijn is de middelloodlijn tussen twee punten op gelijke hoogte op de parabool, bijvoorbeeld op hoogte $y=c$. Die twee punten bereken je dus uit $ax^2+bx+c=c$, ofwel $ax^2+bx=0$. Dit geeft $x=0 \vee x=-\frac{b}{a}$. De symmetrieas is daarom $x=-\frac{b}{2a}$. Dit invullen levert de top op: $T\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

Dus moet je oplossen

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0$. Dit geeft $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Worteltrekken:

$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

En nu een beetje herleiden:

$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D=b^2-4ac$ te berekenen.

- Als $D>0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D=0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D<0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

De oplossing van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$ is $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip ‘quadratic formula’ in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $(x-2)(x-3)=3$ op.

Antwoord

Haakjes wegwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking $x^2-5x+3=0$ op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

Lees af: $a=1$, $b=-5$ en $c=3$.

En dus is $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13$. De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is $x=\frac{--5\pm\sqrt{13}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst!

a Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?

b Laat zien, dat je door haakjes wegwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.

c Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?

d Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

a $3x^2 + 4 = 7x$

b $(x + 1)(2x - 1) = 4$

c $4x = x^2 + 7$

d $(x + 3)^2 = 4x$

e $(2x + 4)^2 = 32x$

f $(2x + 4)^2 = 32$

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $(x + 4)^2 = 4 + x^2$.

a Is dit een kwadratische vergelijking?

b Werk de haakjes weg en herleid de vergelijking op 0.

c Hoe los je nu de vergelijking verder op?

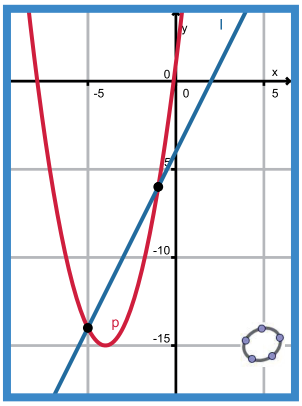
Opgave 8

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn een kwadratische functie met formule $y_1 = x^2 + 8x + 1$ en een lineaire functie met formule $y_2 = 2x - 4$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.



Figuur 2

Antwoord

In de snijpunten geldt $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit $x^2 + 6x + 5 = 0$ lees je af: $a = 1$, $b = 6$ en $c = 5$.

De oplossing is $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. En dus vind je $x = -5 \vee x = -1$.

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten (-5,-14) en (-1,-6) oplevert.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

a In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de som-en-productmethode. Laat dat zien.

b Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?

c Als je de twee x-waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y-waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.

d Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

Opgave 10

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x + 2)(x - 3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.

Opgave 11

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x + 1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

a Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?

b Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?

c Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 12

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a $x^2 + 5x + 1 = 0$

b $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c $-5x^2 - 7x = 1$

d $x(2x + 3) = 3$

e $x(2x + 3) = 3x$

f $x(2x + 3) = 0$

g $(x + 3)(x - 5) = 2$

h $(x + 3)(x - 5) = 0$

i $(2x + 5)^2 = 5$

Opgave 13

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

a $2x^2 + 5x - 1 = 0$

b $5x^2 - x = 1$

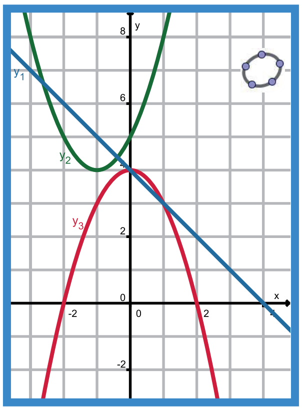
c $-2x^2 + 6x = 18$

d $(1 - 2x)^2 = 12$

e $(x - 1)^2 + 4 = 0$

Opgave 14

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.
Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.



Figuur 3

a $y_1 = y_3$

b $y_1 = y_2$

c $y_2 = y_3$

d $y_3 = 0$

e $y_2 = 0$

f $y_2 = 4$

Opgave 15

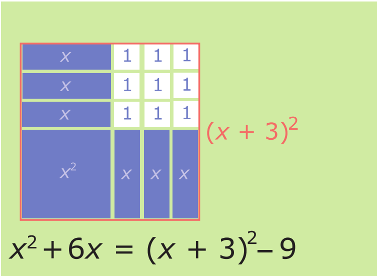
Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.

b $y_1 = (x - 10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

Toepassen

Je hebt je waarschijnlijk de hele tijd al af zitten vragen hoe die wiskundigen nu aan de abc-formule zijn gekomen. Een manier om die formule af te leiden is met behulp van **kwadraat afsplitsen**. Dat is ook een techniek die je in de bovenbouw bij wiskunde B nodig hebt. De volgende opgaven zijn daarom ook vooral nuttig als je overweegt om dat vak te kiezen.



Figuur 4

Neem als voorbeeld de kwadratische functie $y = x^2 + 6x + 1$. Je kunt in de uitdrukking rechts van het isgelijkteken een **kwadraat afsplitsen**. Hiernaast zie je hoe de uitdrukking $x^2 + 6x$ te herleiden is tot $(x + 3)^2 - 9$.
De formule $y = x^2 + 6x + 1$ herleid je daarmee tot $y = (x + 3)^2 - 8$.

Uit deze vorm van de kwadratische functie en kun je de top van de bijbehorende parabool aflezen. Bovendien kun je nu door terugrekenen de nulpunten exact bepalen.

Opgave 16: Een kwadraat afsplitsen

Bekijk in **Toepassen** hoe je een kwadratische functie door kwadraat afsplitsen kunt schrijven in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

a Wat is het voordeel van die vorm?

b Laat zien, dat $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$.

c Schrijf nu de kwadratische functie $y = x^2 + 8x + 2$ in een vorm waarin je de top kunt aflezen.

Kwadraat afsplitsen werkt ook als er mintekens in de formules voorkomen, alleen kun je dan niet altijd meer een figuur erbij tekenen. Splits een kwadraat af bij de volgende kwadratische functies.

d $y = x^2 + 6x - 12$

e $y = x^2 - 4x + 9$

f $y = x^2 + 5x$

Opgave 17: Een vergelijking oplossen door kwadraat afsplitsen

Je kunt nu het kwadraat afsplitsen toepassen bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Elke kwadratische vergelijking kun je er mee oplossen...

Neem eerst de vergelijking $x^2 + 6x + 1 = 0$.

a Splits nu aan de linkerzijde van het isgelijkteken een kwadraat af. Los vervolgens de vergelijking op door terugrekenen.

Op dezelfde manier kun je de volgende vergelijkingen oplossen.

b Los op: $x^2 + 8x - 15 = 0$.

c Los op: $x^2 - 8x + 2 = 0$.

d Los op: $2x^2 - 8x + 2 = 0$.

Opgave 18: Een lastig geval

Kwadraat afsplitsen is een manier om elke kwadratische vergelijking op te lossen.

Los op: $3x^2 + 7x + 1 = 0$.

Opgave 19: De abc-formule afleiden

Kwadraat afsplitsen gaat altijd op dezelfde manier. Als je dit dus één keer netjes doet met de algemene vorm van een kwadratische vergelijking dan krijg je een formule voor alle oplossingen van een kwadratische vergelijking van die vorm.

Los op: $ax^2 + bx + c = 0$.

Testen

Opgave 20

Los de volgende vergelijkingen op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig

a $x^2 + 3x - 12 = 0$

b $x^2 + 5x + 6 = 0$

c $5x^2 + 3x = 15$

d $5x(x + 2) = 15$

Opgave 21

Gegeven is de kwadratische functie $y = -0{,}1x^2 - 2x + 1$.

a Bereken het snijpunt met de y-as.

b Bereken de snijpunten met de x-as in één decimaal nauwkeurig.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $y = 2$.

d Bereken de snijpunten van de gegeven kwadratische functie en de lijn $y = -0{,}1x - 1$.

Practicum: Videoclip: abc-formule

In het engels spreek je van de ‘quadratic formula’, maar met een muziekje er onder is het leren werken met de abc-formule misschien toch wel aangenaam. De uitdrukking ‘square root’ betekent ‘wortel’, eigenlijk ‘vierkantswortel’. Maar verder spreekt de videoclip voor zich.

Bekijk de video

(Bron: **learningupgrade.com**)

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.