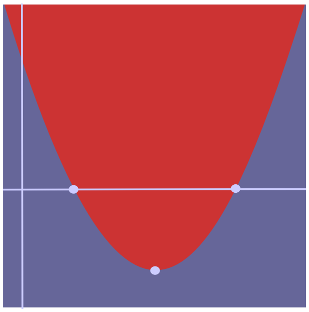
2.2 Nulpunten en top

Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ parabolen horen met top (p,q).
Maar kwadratische functies kunnen ook een andere vorm hebben. En ook dan wil je kunnen bepalen welke top de bijbehorende parabool heeft en welke nulpunten.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- nulpunten en top berekenen van een kwadratische functie.

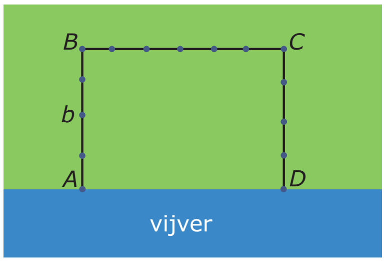
Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top (p,q).

Verkennen

Opgave V1

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie figuur hieronder. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.



Figuur 2

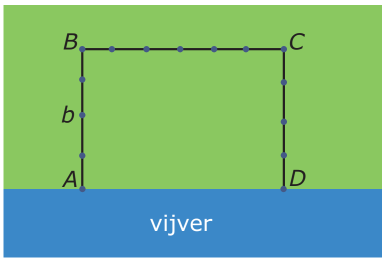
Bekijk de applet: weiland tegen vijver

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?

Uitleg

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 200 m hekwerk. Zie figuur. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB.
Voor BC krijg je dan een lengte van $200 - 2b$.
Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$



Figuur 3

Deze formule kun je kennelijk in twee vormen schrijven: een vorm met haakjes en een vorm die als hoogste macht van b een kwadraat heeft, maar ook nog een term heeft waarin b niet in het kwadraat staat. Er is dan ook sprake van een kwadratische functie. Maar hoe bepaal je het maximum van die functie?

Je kunt natuurlijk een grafiek van deze functie tekenen door eerst een tabel te maken. Maar welke waarden moet je kiezen om in te vullen? Daarvoor bereken je eerst de nulpunten, de snijpunten met de x-as van deze functie, want je weet dat die er moeten zijn.

Daartoe moet je oplossen $b(100-2b)=0$.
Juist vanwege de haakjes is dat eenvoudig: $b=0 \vee 100-2b=0$ geeft $b=0 \vee b=50$.
De nulpunten zijn dus (0,0) en (50,0).

Daarom maak je een tabel met voor x de waarden 0, 10, 20, 30, 40 en 50. Je kunt dan de parabool tekenen en de top bepalen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de nulpunten van de kwadratische functie $A=b(100-2b)=100b-2b^2$ bepaalt.

a Waarom is dit het gemakkelijkst vanuit de vorm met de haakjes?

Je kunt nu een geschikte tabel maken bij de gegeven functie.

b Doe dat en teken de bijbehorende grafiek.

c Welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool? Hoe kun je die uit de twee nulpunten afleiden?

Je kunt nu de top van de parabool bepalen. Daarmee bepaal je de maximale oppervlakte van het landje.

d Bereken die top en geef de maximale waarde van het landje.

Opgave 2

Gegeven is de kwadratische functie $y=0{,}5(x-2)(x-6)$.

a Bereken de nulpunten van deze kwadratische functie.

b Waarom is $x=4$ de symmetrieas van de bijbehorende parabool?

c Bepaal de top van deze parabool.

d Teken de parabool.

Opgave 3

Gegeven is de kwadratische functie $y=x^2-5x+6$.

a Ontbind deze functie eerst in factoren; gebruik de som-en-product methode. Bereken daarna de nulpunten van deze kwadratische functie.

b Welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

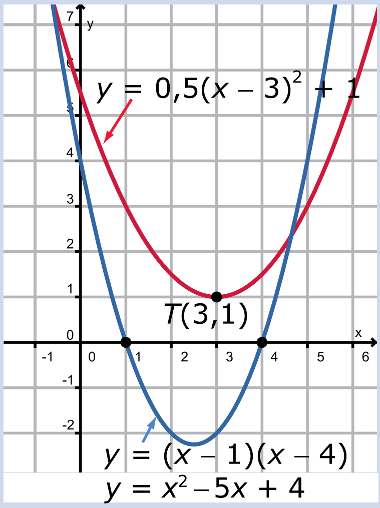
c Bepaal de top van deze parabool.

d Teken de parabool.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: kwadratische functies



Figuur 4

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aannemen:

- $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ waarin (p,q) de **top** van de parabool is.
- $y = a(x - m)(x - n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

Dat het hier voor $a \neq 0$ bij alledrie om kwadratische functies gaat, wordt duidelijk als je bij de eerste twee vormen de haakjes uitwerkt. De hoogste macht van x die dan in de formule voorkomt is 2.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x-as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ kun je juist de nulpunten meteen zien: $(m,0)$ en $(n,0)$. De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een x-coördinaat heeft midden tussen m en n in.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ probeer je door **ontbinden in factoren** in de vorm te brengen waarin je de nulpunten meteen kunt zien. Dat lukt echter niet altijd...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = \text{-}0{,}2(x - 3)(x + 2)$.

Bepaal de nulpunten van de bijbehorende parabool en bereken de top.

Antwoord

Als de formule van een kwadratische functie een vorm heeft zoals die hierboven, kun je de nulpunten uit de formule aflezen. Immers $\text{-}0{,}2(x - 3)(x + 2) = 0$ kun je (na delen door -0,2) splitsen in $x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$ en dat geeft $x = 3 \vee x = \text{-}2$.
De nulpunten zijn daarom (-2,0) en (3,0).

De top van deze parabool kun je berekenen door gebruik te maken van de symmetrie. De symmetrieas is de verticale lijn die midden tussen beide nulpunten door de x-as gaat. Dus dat is de lijn $x = 0{,}5$. Omdat de top van de parabool op de symmetrieas ligt kun je hem nu berekenen: de x-waarde van de top is 0,5 en die kun je in de formule invullen om de bijbehorende y-waarde te vinden.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Ga na, dat de nulpunten die je uit de formule afleest overeen komen met die in de grafiek.

b Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Stel in de applet de formule $y = (x - 2)(x - 5)$ in.

a Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Stel in de applet de formule $y = -2x(x - 5)$ in.

b Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe formule van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ instellen en jezelf zo oefenen in het vinden van de top van de bijbehorende parabool.

c Oefen dit met behulp van de applet.

Opgave 6

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 3x^2 + 42x + 120$.

a Door ontbinden in factoren kun je de formule schrijven in de vorm $y = a(x - m)(x - n)$. Laat dat zien en geef dan de nulpunten van deze functie.

b Bereken de uiterste waarde van deze kwadratische functie.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = 2x^2 - 6x - 1$.

Bereken de top van de bijbehorende parabool.

Antwoord

Bij deze formule kun je de uitdrukking rechts van het isgelijkteken niet in factoren ontbinden. Om de top te kunnen berekenen heb je de symmetrieas van de parabool nodig. Die kun je bepalen door twee punten op de parabool met dezelfde y op te zoeken. De symmetrieas vind je dan door het gemiddelde van de x-coördinaten van die twee punten te berekenen.

In dit geval kun je twee punten met $y = -1$ gemakkelijk berekenen.

Immers uit $2x^2 - 6x - 1 = -1$ volgt $2x^2 - 6x = 0$.

Die vergelijking is wel te ontbinden en op te lossen:
$2x^2 - 6x = 0$ geeft $2x(x - 3) = 0$, zodat $x = 0 \vee x = 3$.

De twee punten met $y = -1$ zijn (0,-1) en (3,-1) en de symmetrieas van de parabool is $x = 1{,}5$.

Nu is de top van de parabool te berekenen en kun je een geschikte tabel en grafiek maken.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Waarom wordt $y = -1$ opgelost en niet een andere y-waarde gekozen?

b Leg uit hoe je aan de symmetrieas van de bijbehorende parabool komt.

c Hoe zou je de nulpunten van deze parabool kunnen berekenen?

Opgave 8

Werk opnieuw met de applet in **Voorbeeld 2**. Nu heb je een kwadratische functie met formule $y = 1{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$. Stel dit in de applet in.

a Bereken de exacte coördinaten van twee punten op deze parabool die dezelfde y-waarde hebben.

b Bereken de top van de parabool. Komt hij overeen met de top van de parabool in de applet?

c Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe parabool instellen en dan de top berekenen.
Oefen dit (met een medeleerling) tot je geen fouten meer maakt.

Opgave 9

Bekijk nu de formule $y = -0{,}5x^2 + 50x$.
De parabool die bij deze formule hoort krijg je met de applet in **Voorbeeld 2** niet in beeld. Om deze parabool te kunnen tekenen is het nuttig om eerst de top en de nulpunten te berekenen.

a Van deze parabool kun je de exacte nulpunten berekenen. Laat dat zien.

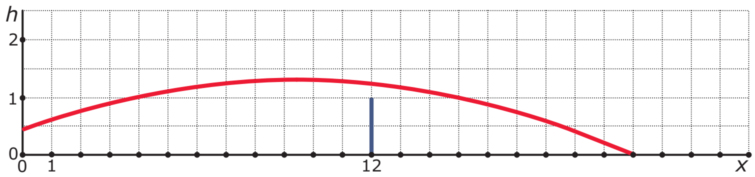
b Welk punt is nu de top van de parabool?

c Maak een schets van de parabool.

Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier de baan van een tennisbal die door een tennisser op de baseline wordt geraakt en aan de andere kant van het net op de grond komt. Veronderstel dat de baan van de bal een zuivere parabool is.
Er geldt: $h = -0{,}01(x + 2)(x - 21)$.



Figuur 5

a Op welke hoogte wordt de bal boven de baseline geraakt?

b Na hoeveel m vanaf de baseline komt de bal (voor de andere baseline) weer op de grond?

c Waar zit het hoogste punt van de bal?

Opgave 11

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

a $y = 2x(x - 30)$

b $y = (x - 2{,}5)^2 - 1$

c $y = -0{,}5(x - 4)(x + 1)$

d $y = (x - 3)^2 + 1$

e $y = (4 - x)^2 - 7{,}5$

f $y = -2(x + 1)^2$

Opgave 12

Gegeven is de kwadratische functie $y = 0{,}5x^2 - x - 4$.

a Bereken de nulpunten van deze functie.

b Bereken de top van de bijbehorende parabool.

c Teken de bijbehorende parabool.

Opgave 13

Gegeven is de kwadratische functie $y = 0{,}5x^2 - x + 1$.

a Bereken van deze functie twee punten met dezelfde y-waarde.

b Bereken de top van de bijbehorende parabool.

c Teken de bijbehorende parabool.

Opgave 14

Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top.

a $y = x^2 + 8x + 2$

b $y = x^2 - 2x + 10$

c $y = 2x^2 + 10x - 8$

d $y = -4(x - 8)(x + 3)$

e $y = 0{,}5x^2 + x$

f $y = -x^2 + 6x - 4$

Toepassen

Ook in de **economie** komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.

Figuur 6

prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Tabel 1

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p.
Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekent door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 15: Soepverkoop (1)

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in **Toepassen**.

a Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.

b Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.

c Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan als maar stijgen?

d Waaraan zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waaraan zie je dat de opbrengst een maximum heeft?

e Bereken het maximum van R. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk opbrengst wil hebben?

f Is het verstandig om een zo groot mogelijk opbrengst te willen hebben?

Opgave 16: Soepverkoop (2)

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijk opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

a Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?

Neem aan dat het maken van elke kop soep € 50 cent kost.

b Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)(340 - 2p)$.

c Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?

d Bereken het maximum van W. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk winst wil hebben?

Testen

Opgave 17

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

a $y = -0{,}5(x-6)^2 + 4$

b $y = 2(x+4)(x-5)$

c $y = x^2 - 6x - 7$

d $y = 0{,}1x^2 - 2x + 6{,}4$