

## 2.1 Kwadratische functies

### Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  parabolen horen met top  $(p, q)$ .

Je gaat daar nu opnieuw mee werken.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

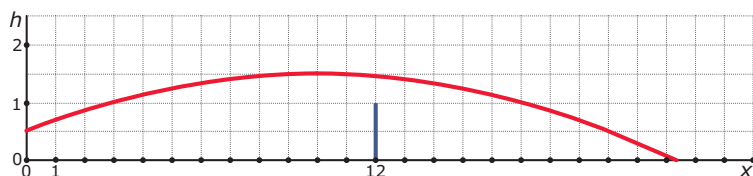
- werken met kwadratische verbanden en de bijbehorende parabolen.

### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a(x - p)^2 + q$  een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top  $(p, q)$ .

### Verkennen

#### Opgave V1



Figuur 2

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

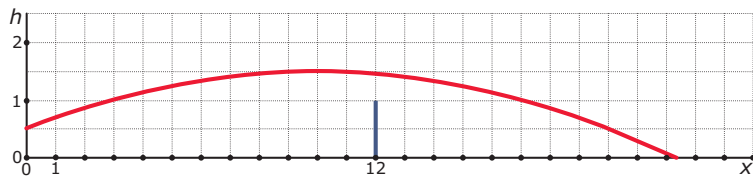
De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule  $h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$

Hierin stelt  $h$  de hoogte van de bal boven het tennisveld voor en is  $x$  de afstand van de monding van het tenniskanon tot het punt recht onder de bal.

Hoe hoog komt de tennisbal maximaal?

## Uitleg

Bekijk de applet: tennisbal



Figuur 3

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule  $h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$

Deze formule is van de vorm  $h = \dots$  en dus is  $h$  een functie van  $x$ . In dit geval is er sprake van een 'kwadratische functie'. Hieronder zie je de bijbehorende tabel.

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$h$	0,50	0,86	1,14	1,34	1,46	1,50	1,46	1,34	1,14	0,86	0,50	0,06	-0,46
toename		0,36	0,28	0,20	0,12	0,04	-0,04	-0,12	-0,20	-0,28	-0,36	-0,44	-0,52

Tabel 1

Je ziet dat de toename van de hoogte van de tennisbal steeds wat minder wordt. Hoeveel minder is moeilijk in te schatten. Op het eerste gezicht lijkt er geen regelmaat in de rij van de toenames te zitten. Maar als je de verandering van de toenames bekijkt is deze constant. Toeval of geen toeval?

De grafiek hierboven is een deel van een 'parabool'. Je ziet dat het hoogste punt de coördinaten (10; 1,5) is. Dit noem je de 'top' van de parabool. De top ligt op de 'symmetrieas' van de parabool. In dit geval is het de lijn  $x = 10$ .

### Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de baan van een tennisbal die wordt afgeschoten door een tenniskanon. De formule die de baan van de bal beschrijft is gegeven.

- Waarom hoort deze formule bij een kwadratische functie?
- Bereken zelf de hoogte van de tennisbal als  $x = 3$ .
- Je ziet dat er ook een rij is gemaakt van de toenames van de hoogte telkens als  $x$  met 2 wordt verhoogd. Maak zelf een rij met de verandering van die toenames.
- De top van de parabool kun je uit de tabel aflezen. Maar je kunt hem ook direct uit de formule afleiden. Ga na hoe.

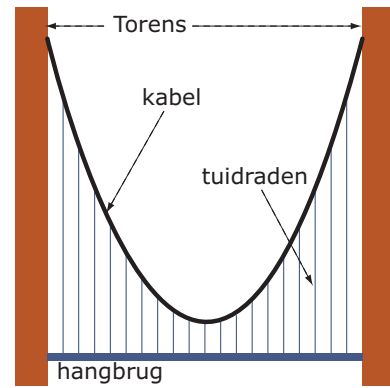
## Opgave 2

Een hangbrug is met tuidraden opgehangen aan twee kabels die zijn bevestigd aan twee grote pilaren aan weerszijden van de brug. De kabels hangen dan in de vorm van een parabool. Een mogelijke formule voor zo'n parabool is

$$h = 0,01 \cdot (a - 70)^2 + 16$$

Hierin is  $h$  de hoogte van een punt op de kabel boven het wegdek van de brug en  $a$  de afstand in meters tot de linker toren.

- Hoe hoog boven het wegdek zit de kabel aan de linker toren vast?
- Maak een tabel met voor  $a$  de waarden 0, 10, 20, enzovoorts. Maak ook een rij met afnames en een rij met de verandering van de afnames. Wat valt op bij die laatste rij?
- Hoe groot is de afstand tussen beide torens?
- Welk punt is de top van de parabool? Hoe hoog zit de kabel daar boven het wegdek?



Figuur 4

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

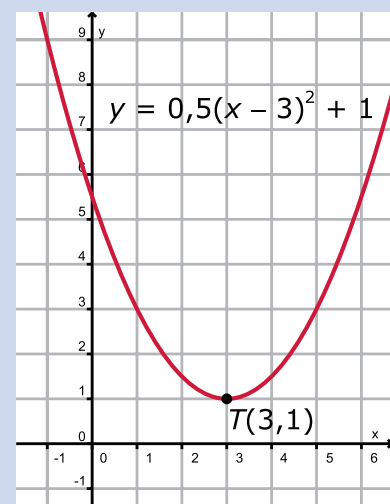
#### Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een **kwadratische functie** hoort een formule van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  met  $a \neq 0$ . De bijbehorende grafiek is een **parabool** met **top**  $(p, q)$  en **symmetrieas**  $x = p$ .

- Als  $a > 0$  heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van  $q$  voor  $x = p$ .
- Als  $a < 0$  heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van  $q$  voor  $x = p$ .

Een maximum of een minimum noem je een **uiterste waarde** of ook wel een **extreme waarde** van een functie.

Als je in een bijbehorende tabel de waarden van  $x$  met vaste stappen laat toenemen, dan kun je een kwadratisch verband herkennen aan de symmetrie in de tabel. Kenmerkend voor een kwadratisch verband is ook dat de verandering van de toenames (of de afnames) constant is.



Figuur 5

### Voorbeeld 1

#### Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = (x - 1)^2 + 3$ .

Bereken de extreme waarde van deze kwadratische functie en teken de bijbehorende parabool.

Antwoord

De top van de parabool kun je uit de formule aflezen:  $T(1, 3)$ . De parabool heeft daarom de lijn  $x = 1$  als symmetrieas en je ziet dat het een dalparabool is.

De extreme waarde is daarom een minimum van 3 voor  $x = 1$

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken en de grafiek tekenen.

### Opgave 3

- a Stel in de applet de formule in die in het voorbeeld is gegeven. Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van deze functie een dalparabool is?
- b Waarom is het belangrijk om eerst de symmetrieas te weten voor je een tabel maakt?
- c Hier zie je een geschikte tabel voor deze parabool. Maak hem af en teken de parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

Tabel 2

- d Maak een extra rij in deze tabel met daarin de afnames van de y-waarden bij elke stap. En maak ook een extra rij met de verandering van die afnames.
- e Is de verandering van de afnames constant?

### Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies de extreme waarde en de symmetrieas. Vermeld ook welke soort parabool het betreft. Gebruik eventueel de applet in de **Theorie**.

- a  $y = -(x + 1)^2 - 4$
- b  $y = 2(x - 4)^2 + 1$
- c  $y = -0,01(x - \sqrt{3})^2 + 2$

### Opgave 5

Gegeven is de formule  $y = (2x - 4)^2 + 3$ .

- a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als  $y = 4(x - 2)^2 + 3$ .
- b Deze formule hoort dus ook bij een kwadratische functie. Welke uiterste waarde en welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

### Voorbeeld 2

**Bekijk de applet: kwadratische functie**

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = (x - 1)^2 - 3$ .

Bereken de snijpunten van de bijbehorende parabool met beide coördinaatassen.

Antwoord

Het snijpunt met de y-as kun je eenvoudig berekenen door  $x = 0$  in te vullen:  $y = (0 - 1)^2 - 3 = -2$ . Het snijpunt met de y-as is dus  $(0, -2)$ .

Met de x-as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door  $y = 0$  te nemen.

Dat geeft de vergelijking  $(x - 1)^2 - 3 = 0$ .

Deze vergelijking kun je oplossen door terugrekenen. Je vindt  $y = 1 \pm \sqrt{3}$ . Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven. Als dat wordt gevraagd kun je ze benaderen in bijvoorbeeld één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je bij een kwadratische functie de snijpunten van de bijbehorende parabool met de beide coördinaatassen kun opstellen.

- a Stel in de applet de formule in die in het voorbeeld is gegeven. Lees de gevraagde punten uit je figuur af.
- b Laat zien hoe de snijpunten met de x-as worden berekend. Schrijf hun exacte coördinaten op.

- c Laat zien dat beide snijpunten met de  $x$ -as evenver van de symmetrieas van de parabool liggen.
- d Geef een benadering van de snijpunten met de  $x$ -as in twee decimalen nauwkeurig. Ga na dat ze passen bij wat je uit de figuur hebt afgelezen.

### Opgave 7

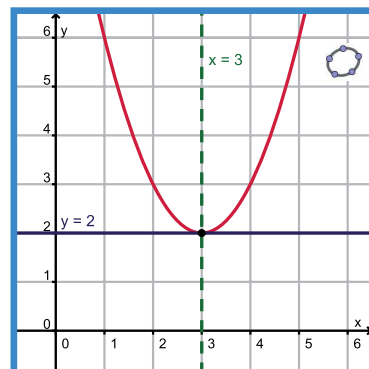
Een kwadratische functie is gegeven door de formule  $y = -4(x - 8,5)^2 + 5$ .

- a Bereken van de bijbehorende parabool het snijpunt met de  $y$ -as.
- b Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met de  $x$ -as.

### Voorbeeld 3

Door de top van een parabool gaan twee lijnen die precies één punt met de parabool gemeenschappelijk hebben. Eén van die twee lijnen is de symmetrieas van de parabool. De andere lijn noem je een **raaklijn** aan de parabool in de top.

Bekijk nu de parabool met formule  $y = (x - 3)^2 + 2$ . Welke lijn is de symmetrieas en welke lijn is de raaklijn door de top?



Figuur 6

Antwoord

De top is  $T(3,2)$ .

De symmetrieas is de lijn  $x = 3$ .

De raaklijn door de top is de lijn  $y = 2$ .

### Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd wat de raaklijn door de top van een parabool is.

- a Waarom is bij een kwadratische functie de raaklijn door de top altijd horizontaal, dus evenwijdig aan de  $x$ -as?
- b De parabool met formule  $y = -0,5(x - 1)^2 + p$  heeft ook de lijn  $y = 2$  als raaklijn door de top. Welke waarde moet  $p$  dan hebben?  
Gegeven is een parabool door de formule  $y = (x - 3)^2 + 5$ .
- c Welke lijn raakt deze parabool in de top?
- d Waaraan zie je dat deze parabool geen snijpunten met de  $x$ -as heeft? En hoe zit het met het snijpunt met de  $y$ -as?

### Opgave 9

Gegeven is een kwadratische functie van de vorm  $y = a(x + 3)^2 + q$ .

- a De lijn  $y = 1$  raakt de bijbehorende parabool. Welke waarde heeft  $q$ ?
- b Welke lijn is de symmetrieas van deze parabool?
- c De waarde van  $a$  heeft geen enkele invloed op je voorgaande twee antwoorden. Hoe komt dat en waarop heeft de waarde van  $a$  wel invloed?

## Verwerken

### Opgave 10

Van een kwadratische functie is de formule  $y = -0,5(x - 6)^2 + 10$ .

De bijbehorende grafiek is een bergparabool.

- a Waarom is de bijbehorende grafiek een bergparabool? Welk punt is de top van die parabool?
- b Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie?

- c Maak een geschikte tabel en teken de parabool. Zorg er voor dat de top in ieder geval duidelijk in beeld is.
- d Maak een tabel van de toenames van de  $y$ -waarden bij een toename van  $x$  met 2. Maak ook een tabel met de verandering van de toenames. Is die verandering constant?

### Opgave 11

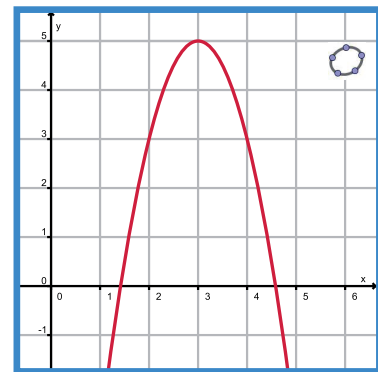
Bereken van elk van de volgende kwadratische functies de extreme waarde.

- a  $y = (x + 5)^2 + 7$
- b  $y = -2(x - 12)^2 + 45$
- c  $y = (x + \sqrt{2})^2 - \sqrt{3}$
- d  $y = 5,5 - 3(x - 2)^2$

### Opgave 12

Je ziet hier een parabool. De bijbehorende formule is  $y = -2(x - 3)^2 + 5$ .

- a Bepaal de top van deze parabool en bereken het snijpunt met de  $y$ -as.
- b Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de  $x$ -as.
- c Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van deze parabool met de  $x$ -as.



Figuur 7

### Opgave 13

Gegeven is een parabool met formule  $y = -0,5(x - 10)^2 + 40$  en een lijn met vergelijking  $y = a$ .

- a Bereken de snijpunten van deze parabool met de beide coördinaatassen.
- b Voor welke waarde van  $a$  is de lijn een raaklijn aan de parabool?
- c Voor welke waarden van  $a$  hebben de lijn en de parabool twee snijpunten?
- d Voor welke waarden van  $a$  hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

## Toepassen

Parabolen komen regelmatig voor. Wel moet je daarbij vaak uitgaan van ideale omstandigheden die in de praktijk niet precies gelden. Voorbeelden zijn:

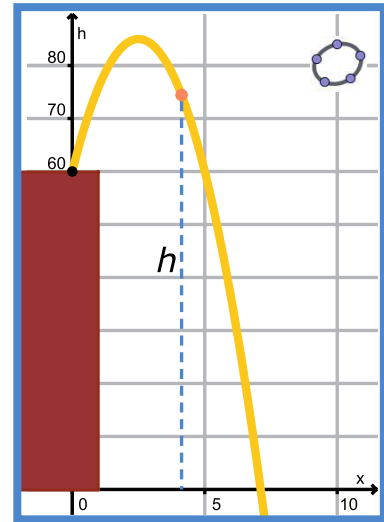
- de baan van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt);
- de hoogte van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt) afhankelijk van de tijd;
- de boog die de kabels van een hangbrug maken als die brug met behulp van zogenaamde tuidraden aan de kabels is opgehangen.

Afhankelijk van de omstandigheden (de kracht waarmee het voorwerp wordt afgeschoten, de afmetingen van de hangbrug) kun je bij die parabolen formules maken waarmee je dan weer berekeningen kunt uitvoeren.

### Opgave 14: Kogelbaan

In een experiment wordt vanaf een 50 meter hoge toren een tennisbal afgeschoten die uiteindelijk zal neerkomen op het plein voor deze toren. De baan die de kogel volgt wordt gefilmd en met behulp van een computerprogramma wordt de baan van de bal berekend. De hoogte van de tennisbal boven de grond wordt bij benadering gegeven voor de formule  $h = -4(x - 2,5)^2 + 85$ , waarin  $h$  de hoogte van de bal boven de begane grond in meters en  $x$  de afstand van het punt op de grond recht onder de plaats van afschieten en het punt op de grond recht onder de bal is. Ook  $x$  is in m.

- Waarom kun je zien dat deze tennisbal nogal steil omhoog wordt geschoten?
- Hoe hoog boven de grond komt deze tennisbal maximaal?
- Hoeveel m vanaf het punt op de grond recht onder het afschietpunt komt de bal weer op de grond?



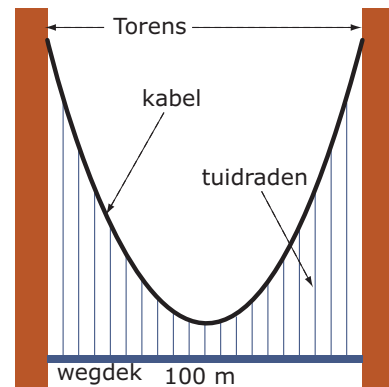
Figuur 8

### Opgave 15: Hangbrug

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens op 100 m boven het wegdek. De kortste van de 19 tuidraden is 10 m lang.

Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de  $x$ -as samenvalt met het wegdek en de  $y$ -as over de kortste tuidraad loopt. Neem aan dat de eenheden op beide assen in m zijn. De formule van de bijbehorende kwadratische functie is dan  $y = \frac{9}{250}x^2 + 10$ .

- Ga na dat de parabool bij deze formule past bij de tekening van de hangbrug.
- Hoelang is de negentiende tuidraad gezien vanaf de linker toren?



Figuur 9

## Testen

### Opgave 16

Bereken de extreme waarde van elk van de volgende kwadratische functies. Geef ook aan of het een minimum of een maximum betreft.

- $y = -0,5(x - 6)^2 + 4$
- $y = 1,2(x + 6)^2 + 4$

### Opgave 17

Gegeven is de kwadratische functie  $y = -0,01(x - 10)^2 + 5$ .

- Bereken het snijpunt van de bijbehorende parabool met de  $y$ -as.
- Bereken de snijpunten van de bijbehorende parabool met de  $x$ -as.
- Voor welke waarde van  $p$  raakt de lijn  $y = p$  deze parabool?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---