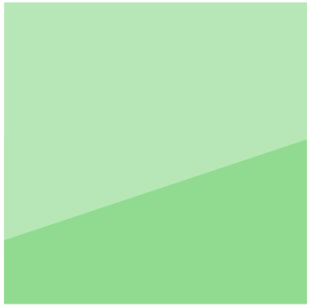
1.3 Het hellingsgetal

Inleiding

De grafiek van een lineair verband wordt bepaald door twee gegevens. Dat kunnen de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de verticale as zijn, maar het kunnen ook gewoon twee gegeven punten van de grafiek zijn. Maar hoe bepaal je dan de bijbehorende formule?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) berekenen en daarmee een formule opstellen.

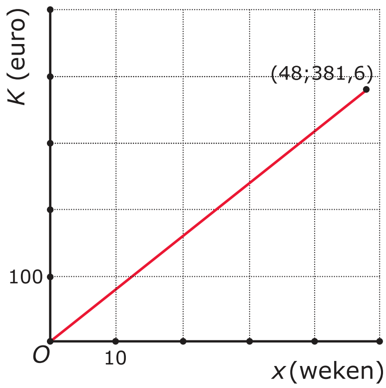
Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige en lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

In de gemeente Overdal wordt maximaal 48 weken per jaar het huisvuil opgehaald. In elke zwarte vuilcontainer zit een chip die er voor zorgt dat elke leging geregistreerd wordt. De gemeente stuurt dan op het eind van het jaar een rekening. Als je iedere week de zwarte container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Hiernaast zie je een grafiek waarin de kosten zijn uitgezet tegen het aantal weken.



Figuur 2

a Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $K = a \cdot x$ waarin a een constante is. Waarom is dat?

b Bereken de waarde van de evenredigheidsconstante a die bij deze grafiek past.

Opgave V2

In de gemeente Vijfhouten worden de kosten voor het ophalen van de zwarte vuilcontainers anders berekend. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar, net als in Overdal, € 381,60 betalen.

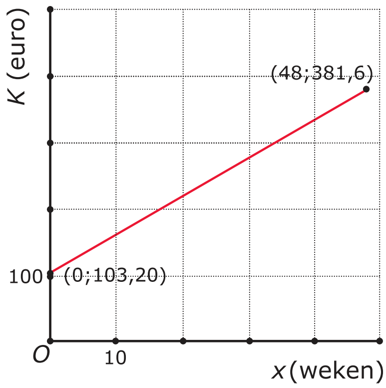
a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K in euro afhankelijk van het aantal weken x dat de zwarte container wordt geleegd.

b De grafiek is een rechte lijn, dus er hoort een formule bij van de vorm $K = a \cdot x + b$. Welke waarde heeft b.

c Hoe kun je de waarde van de richtingscoëfficiënt a bepalen?

Uitleg

In de gemeente Vijfhouten worden de zwarte vuilcontainers wekelijks en maximaal 48 keer per jaar opgehaald. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Deze grafiek laat het verband zien tussen het aantal keren x dat je de zwarte container laat legen en de kosten per jaar K.



Figuur 3

Bij deze grafiek hoort een lineaire functie van de vorm $K = ax + b$. Uit de gegevens volgt onmiddellijk $b = 103{,}20$. Maar hoe bepaal je nu de waarde van de richtingscoëfficiënt a?

Bekijk de twee gegeven punten van de grafiek $(0; 103{,}20)$ en $(48; 381{,}60)$. Het aantal weken x neemt tussen deze twee punten toe met $48 - 0 = 48$. Het te betalen bedrag K neem tussen deze twee punten toe met $381{,}60 - 103{,}20 = 278{,}40$. Per week is dat $278{,}\frac{40}{48} = 5{,}80$. De toename per eenheid is het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn.

Kortweg: $a = \frac{381{,}60 - 103{,}20}{48 - 0} = 5{,}80$.

En de bij de grafiek passende lineaire functie is $K = 5{,}80x + 103{,}20$.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het hellingsgetal berekent als je van een rechte lijn twee punten weet.

In een andere gemeente wordt hetzelfde systeem gehanteerd als in de gemeente Vijfhouten, alleen met andere bedragen. Daar betaalt de familie Arends in 2011 € 277,50 en daarvoor hebben ze de zwarte container 34 keer laten legen. Hun buren hebben nog twee opgroeiende kinderen en moesten hun zwarte container 42 keer laten legen. Zij betaalden dat jaar € 327,50.

a Hoeveel keer extra werd de zwarte container van de buren geleegd?

b Hoeveel moesten de buren meer betalen?

c Hoeveel kost in deze gemeente dus het legen van de zwarte container per keer?

Ook in deze gemeente geldt een formule van de vorm $K = ax + b$.

d Welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt a?

e Door welke twee punten gaat de rechte lijn die bij deze formule hoort? Hoe kun je vanuit die twee punten in één keer de richtingscoëfficiënt berekenen?

f Je hebt nu gevonden dat de formule er uit ziet als $K = 6{,}25x + b$. Hoe vind je de waarde van b?

Opgave 2

De grafiek van een rechte lijn gaat door $A(3,5)$ en $B(7,11)$. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$.

a Hoeveel neemt de waarde van x toe tussen beide punten?

b Hoeveel neemt de waarde van y toe tussen beide punten?

c Hoeveel neemt de waarde van y toe als x met 1 wordt verhoogd?

Je hebt de waarde van de richtingscoëfficiënt a berekend.

d Hoe ziet de formule er nu uit?

e Bereken de waarde van b.

f Schrijf tenslotte de complete formule op die bij deze lijn past.

g Kun je je antwoord nog controleren?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De algemene formule voor een lineair verband is

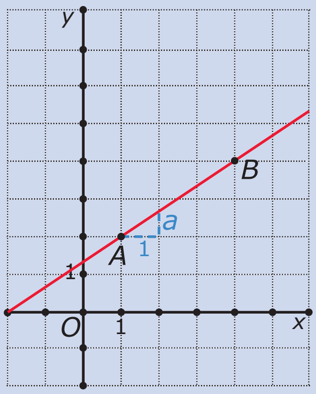
$y = a \cdot x + b$ met a en b willekeurige reële getallen.

Het **hellingsgetal**, of de **richtingscoëfficiënt** a, geeft aan hoeveel de y-waarde stijgt of daalt als de x-waarde met 1 toeneemt.

Van een lineaire grafiek waarvan alleen twee punten bekend zijn, kun je zelf een bijpassende formule opstellen. Je bepaalt dan eerst het hellingsgetal a door het verschil van de y-waarden van beide punten te delen door het verschil van de x-waarden. (Dit kan alleen bij lijnen die niet verticaal lopen.)

Bij de lijn door $A(1,2)$ en $B(4,4)$ is $a = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$.

Evenwijdige lijnen hebben hetzelfde hellingsgetal.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Stel een formule op bij de lijn door de punten $A(0,1)$ en $B(1,4)$.

Antwoord

De formule heeft de vorm $y = a \cdot x + b$ waarin a het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel y toeneemt bij een toename van x met 1.

Teken daartoe eerst de twee punten en de lijn in een assenstelsel.

Maak deze lijn in de applet door de punten A en B op de juiste plek te zetten.

- Tussen de punten A en B neemt x toe met 1.
- Tussen de punten A en B neemt y toe met $4 - 1 = 3$.

Je weet nu dat het hellingsgetal $a = 3$ is. De juiste waarde van b lees je af bij het punt op de verticale as: $b = 1$.

De gevraagde formule wordt $y = 3x + 1$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(0,1)$ en $B(1,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0,5)$ en $B(1,3)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0,-2)$ en $B(1,0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(2,4)$.

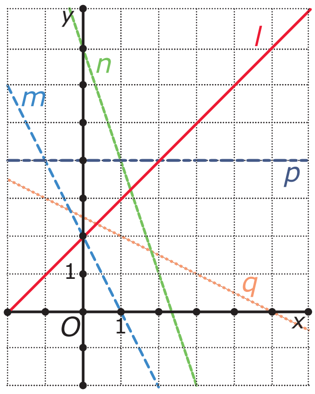
e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(2,5)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(3,6)$ en $B(4,1)$.

Opgave 4

Bekijk de rechte lijnen in de grafiek hiernaast. Elke rechte lijn is de grafiek van een lineaire functie.

Geef de bijbehorende formules.



Figuur 5

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Stel een formule op bij de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$.

Antwoord

De formule heeft de vorm $y = a \cdot x + b$ waarin a het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel y toeneemt bij een toename van x met 1. Dat kun je zo doen:

- Tussen de punten A en B neemt x toe met $4 - 1 = 3$.
- Tussen de punten A en B neemt y toe met $4 - 2 = 2$.
- Als x met 1 toeneemt, neemt y toe met $\frac{2}{3}$.

Nu je weet dat het hellingsgetal $a = \frac{2}{3}$, wordt je formule $y = \frac{2}{3}x + b$. De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van één van beide gegeven punten in de vergelijking in te vullen.

Ga na, dat je dezelfde vergelijking krijgt als in de applet. (Maar nu exact in breuken!)

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(5,7)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(1,0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(4,3)$.

e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-3,-3)$ en $B(4,1)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(2,0)$ en $B(0,3)$.

Opgave 6

Bij een lineaire functie hoort bij $x = -3$ de uitkomst -40 en bij $x = 2$ de uitkomst 10.

Stel de bijbehorende formule op.

Opgave 7

In het **Practicum** kun je telkens twee nieuwe lijnen maken door de vier gegeven punten te verplaatsen. Je ziet dan van beide lijnen de formule. Je kunt jezelf of elkaar oefenen door die na te rekenen. Je kunt ook lijnen met een gegeven formule maken door de punten op de juiste plek te zetten.

a Oefen met een medeleerling.

b Als je punten A recht onder punt $B(4,4)$ zet, is de lijn door beide punten evenwijdig aan de y-as. Welke formule hoort er bij zo'n lijn? Kun je dat verklaren?

c Bij welke lijnen horen formules van de vorm $y = b$? Kun je dat verklaren?

Voorbeeld 3

Een lijn k gaat door het punt $(1,20)$ en loopt evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = 2x + 1$. Welke formule hoort bij lijn k?

Antwoord

Omdat de lijnen l en k evenwijdig zijn, hebben ze dezelfde richtingscoëfficiënt. De formule bij lijn k heeft dus de vorm $y = 2x + b$.

De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van het gegeven punt van k in de vergelijking in te vullen: $20 = 2 \cdot 1 + b$ geeft $b = 18$.

De gevraagde formule is $y = 2x + 18$.

Opgave 8

Lijn k gaat door het punt $(2,24)$ en is evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = -x$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Opgave 9

Lijn k gaat door het punt $(-3,20)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $(4,5)$ en $(12,15)$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Verwerken

Opgave 10

De **Chinese munteenheid** is de yuan. Je weet wel dat er iets meer dan acht yuan in een euro gaan, maar de precieze koers schommelt nogal. Bovendien rekent een bank in China als je euro's inwisselt voor yuan waarschijnlijk nog bepaalde omrekenkosten. Op zekere dag betaal je in Beijing voor 100 yuan € 85,00 en later betaal je voor 50 yuan € 43,75. Ga er van uit dat de wisselkoers niet is veranderd intussen.

a Hoeveel euro kost elke yuan?

b Hoeveel bankkosten betaal je elke keer als je yuan koopt?

Het bedrag E in euro dat je betaalt voor Y yuan kun je met een lineaire formule berekenen. Ga uit van een constante wisselkoers.

c Stel die formule op.

d Hoeveel kosten je 250,00 yuan?

Opgave 11

Stel in de volgende gevallen een formule op bij de beschreven lijn.

a De lijn heeft een hellingsgetal van 4 en gaat door het punt $(0,6)$.

b De lijn gaat door de punten $A(0,31)$ en $B(2,15)$.

c De lijn gaat door de punten $A(6,2)$ en $B(12,-1)$.

d De lijn gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(7,0)$.

e De lijn gaat door het punt $A(0,10)$ en is evenwijdig met de lijn $y = 0{,}25x - 5$.

Opgave 12

Deze tabel laat zien hoe een kaars opbrandt. Op een aantal tijdstippen is de lengte van de kaars gemeten in halve cm nauwkeurig. Teken je hierbij een grafiek dan lijken de punten op een rechte lijn te liggen. Het lijkt er daarom op dat L een lineaire functie is van t. Maar hoe weet je dat zeker?

tijdstip t in uur	0	3	5	9
lengte L in cm	43	38,5	35,5	25,5

Tabel 1

a Neem aan dat L een lineaire functie is van t en stel met behulp van de eerste twee gegevens uit de tabel een daarbij passende formule op.

b Ga na, dat ook de andere twee gegevens in de tabel aan de gevonden formule voldoen.

c Waarom kun je nu wel zeggen dat de gegevens in de tabel bij een lineaire functie horen, maar kun je nog steeds niet zeggen dat L een lineaire functie is van t?

Opgave 13

In een binnenvaartschip wordt grind gestort. Bij een lading van 200 ton is de diepgang 2,25 m en bij een lading van 600 ton is de diepgang 3,75 m. Bij een diepgang van 5,25 m is het schip volgeladen.

De diepgang D van dit schip in m is een lineaire functie van het gewicht van de lading L in ton.

a Stel een daarbij passende formule op.

b Welke diepgang heeft het lege schip?

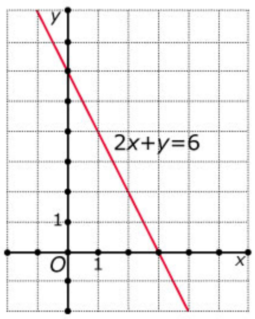
Het schip moet door een vaargeul met een diepte van 5 m. Voor de veiligheid moet er minstens 1 m water onder het schip overblijven.

c Hoeveel ton grind mag dit schip maximaal laden? Rond je antwoord af op gehele tonnen.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

Wat je in dit onderdeel hebt geleerd is het opstellen van een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of drie punten op een rechte lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn, of lijnen loodrecht op elkaar staan. Dit kom je later bij wiskunde B tegen.



Figuur 6

Opgave 14: Drie punten op één lijn

Hierboven kun je lezen wat de vergelijking van een lijn is.

Je wilt onderzoeken of de drie punten $O(0,0)$, $A(30,12)$ en $B(50,19)$ op één lijn liggen.

a Stel een vergelijking op van de lijn door O en A.

b Onderzoek nu of B op deze lijn ligt.

c Onderzoek of de punten A, B en $C(90,33)$ op één lijn liggen.

Opgave 15: Lijnen door punten op de assen

Als van een lijn het snijpunt met de x-as en het snijpunt met de y-as bekend zijn, kun je snel een vergelijking opstellen.

Neem de lijn door $A(3,0)$ en $B(0,2)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door A en B.

b Laat zien dat deze vergelijking te schrijven is als $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Neem nu aan dat de lijn door $A(a,0)$ en $B(0,b)$ met zowel a als b ongelijk aan 0.

c Laat zien dat de vergelijking van deze lijn te schrijven is als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

d Van welke lijnen kun je niet een formule zoals die in c opstellen?

Opgave 16: Evenwijdige en loodrechte lijnen

Je weet dat lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt evenwijdig zijn. Dat betekent dat je kunt nagaan of een figuur een parallellogram is door hem in een assenstelsel te plaatsen en na te gaan of er bij de lijnen door de hoekpunten sprake is van gelijke richtingscoëfficiënten.

Neem bijvoorbeeld vierhoek $ABCD$ met $A(10,20)$, $B(16,23)$, $C(12,30)$ en $D(18,53)$.

a Laat met behulp van richtingscoëfficiënten zien dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn.

b Om aan te tonen dat deze vierhoek een parallellogram is, moet je nu laten zien dat ook het andere paar zijden evenwijdig is. Laat zien hoe je dat doet.

Stel je nu eens voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt 3 die door $A(0,2)$ gaat.

c Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,5)$?

d Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90°. Teken de beeldpunten van A en B en teken de lijn door die beeldpunten.

e Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn door beide beeldpunten?

Stel je voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt p die door $A(0,q)$ gaat.

f Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,p+q)$?

g Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90°. Welke richtingscoëfficiënt heeft de nieuwe lijn?

Je hebt nu laten zien dat als een lijn l als richtingscoëfficiënt p heeft, de lijn die loodrecht staat op l als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{p}$ heeft.

h Neem de lijn l met vergelijking $x+2y=6$. Stel een vergelijking op van de lijn door (1,5) en loodrecht op l.

i Je kunt het opstellen van een vergelijking van een lijn loodrecht op een andere lijn oefenen met de applet in het **Practicum**. Doe dit samen met een medeleerling; geef elkaar opgaven op.

Testen

Opgave 17

Bij een bepaald wisselkantoor betaal je voor 10.000 (tienduizend roebel) op zeker moment € 127,50 en voor 15.000 € 187,50. Noem het aantal roebels dat je voor E euro kunt kopen R.

a Stel een formule op voor E als functie van R.

b Hoeveel bedragen de vaste transactiekosten?

c Hoeveel betaal je voor 35.000?

Figuur 7

Opgave 18

In de volgende gevallen is y een lineaire functie van x. Stel een bijpassende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (10,15) en door (30,40).

b De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (10,15) en door (30,45).

Practicum

Met deze applet kun je nieuwe lijnen maken door de punten te verplaatsen. Je kunt dan zelf de bij deze lijnen passende formules maken en deze vergelijken met de formules die de applet geeft.

Bekijk de applet.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.