5.2 Wortels

Inleiding

Sven wil dit buitenschaakspel maken. Het schaakbord bestaat uit 8 bij 8 tegels. Als elke tegel vierkant is met zijden van 50 cm, dan krijgt hij een schaakbord van 16 m^2. Dat is veel te groot voor hun vierkante stuk tuin van 12 m^2.

Figuur 1 Bron: Wikipedia

Je leert in dit onderwerp

- terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) en de bijbehorende notatie.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen door kwadrateren.

Verkennen

Opgave V1

Sven heeft maximaal een vierkant stuk tuin van 12 m^2 tot zijn beschikking om zo'n schaakbord te maken.
Omdat 9 een kwadraat is, besluit hij een schaakbord met een oppervlakte van 9 m^2 te maken.

Figuur 2 Bron: Wikipedia

a Welke afmetingen krijgt het vierkante schaakbord?

b Hoe lang en hoe breed moet elke tegel van zijn schaakbord dan worden?

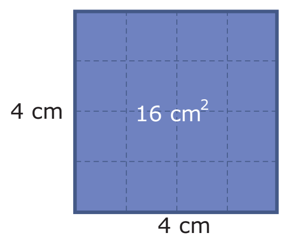
c Het schaakbord zou groter kunnen. Welke afmetingen moet het hebben als het een oppervlakte van 10 m^2 zou krijgen? Welk probleem heb je dan?

Uitleg

De oppervlakte van dit vierkant is 16 cm^2.
De lengte van elke zijde is 4 cm, want $4^2 = 4 \times 4 = 16$.
Je zegt: de wortel van 16 is 4.
Je schrijft dit als: $\sqrt{16} = 4$.
Dat noem je worteltrekken. Je rekenmachine kan ook worteltrekken. Bijvoorbeeld $\sqrt{441} = 21$ gaat waarschijnlijk zo:

2nd x^2 441) =

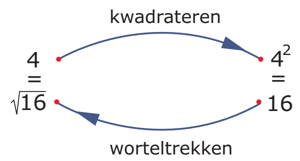
Maar misschien heeft je rekenmachine wel een afzonderlijke worteltoets...



Figuur 3

De bewerkingen ‘kwadraat nemen’ en ‘worteltrekken’ heffen elkaar op. Meetkundig gezien gaat het bij kwadrateren om het bepalen van de oppervlakte van een vierkant vanuit de zijde: $4^2 = 16$. En bij wortel trekken gaat het om het bepalen van de zijde vanuit een gegeven oppervlakte $\sqrt{16} = 4$.

En dus is: $\sqrt{4^2} = 4$ en ook $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$



Figuur 4

Opgave 1

De oppervlakte van een vierkant is 64 cm^2.

a Hoe bereken je de zijde van het vierkant? Bereken ook die zijde.

b De zijde van een vierkant heeft een lengte van $\sqrt{7}$. Hoeveel bedraagt de oppervlakte?

Opgave 2

Bereken de volgende wortels:

a $\sqrt{49}$

b $\sqrt{144}$

c $\sqrt{2{,}25}$

d $\sqrt{\frac{4}{9}}$

e $\sqrt{0{,}64}$

f $\sqrt{49}$

Opgave 3

Tussen welke gehele getallen ligt $\sqrt{140}$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je vanuit een kwadraat terugrekent, noem je dat **worteltrekken** en het resultaat heet de **wortel** van dat getal. Worteltrekken is de terugrekenbewerking bij kwadrateren en je kunt deze bewerking op elk getal toepassen.

De wortel van 16 schrijf je als $\sqrt{16}$.

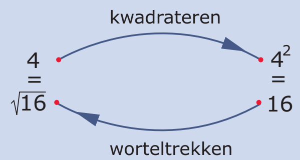
De wortel van 16 is $\sqrt{16} = 4$, want $4^2 = 16$.

De wortel van 3 schrijf je als $\sqrt{3}$.

De wortel van 3 is $\sqrt{3} = 1{,}73205... \approx 1{,}732$.
Dit getal is alleen te benaderen, er bestaat geen exacte uitkomst.

Het kwadraat van $\sqrt{3}$ is $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

De wortel van 3^2 is $\sqrt{3^2} = 3$.



Figuur 5

Voorbeeld 1

Uit een kwadraat kun je gemakkelijk wortel trekken, zelfs zonder rekenmachine.
Bijvoorbeeld:

- $\sqrt{1024} = \sqrt{32^2} = 32$
- $\sqrt{1\tfrac{7}{9}} = \sqrt{\tfrac{16}{9}} = \sqrt{\left(\tfrac{4}{3}\right)^2} = \tfrac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}$
- $\sqrt{1{,}44} = \sqrt{(1{,}2)^2} = 1{,}2$

Opgave 4

Bereken (probeer zonder rekenmachine te werken):

a $\sqrt{64}$

b $\sqrt{100}$

c $\sqrt{144}$

d $\sqrt{225}$

e $\sqrt{2{,}25}$

f $\sqrt{6{,}25}$

g $\sqrt{0{,}09}$

h $\sqrt{0{,}36}$

Opgave 5

Bereken:

a $\sqrt{\tfrac{1}{9}}$

b $\sqrt{\tfrac{9}{16}}$

c $\sqrt{1\tfrac{9}{16}}$

d $\sqrt{2\tfrac{1}{4}}$

Opgave 6

Hoe zit het met de wortels van negatieve getallen?

a Welk antwoord zou je $\sqrt{-16}$ willen geven?

b Waarom kun je de wortel uit een negatief getal niet trekken?

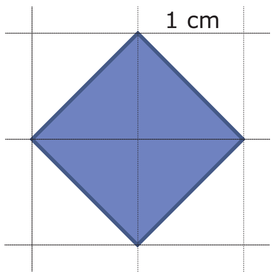
Voorbeeld 2

De oppervlakte van dit vierkant is 2 cm^2.

De lengte van de zijde is daarom $\sqrt{2}$.

Maar hoe groot is $\sqrt{2}$ nu precies?

Dit was al in de Oudheid een boeiende vraag.
Niemand wist er het antwoord op...
Na heel lang proberen vind je ongeveer 1,414213562, maar zelfs dat is niet het exacte antwoord...



Figuur 6

$\sqrt{2}$ is niet exact te berekenen, dit getal kan alleen worden benaderd!

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ gaat waarschijnlijk zo:

2nd x^2 2 =

Hetzelfde geldt voor getallen als $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, kortom voor vrijwel alle wortels.
Alleen de wortels uit zuivere kwadraten 'komen uit': bijvoorbeeld $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf zo'n vierkant op een cm-rooster en leg uit waarom de oppervlakte van dit vierkant 2 is.

b De lengte van de zijde van het vierkant is daarom $\sqrt{2}$. Meet eens op hoe lang de zijde van het vierkant is in mm nauwkeurig en leg uit waarom dit nooit de exacte lengte van de zijde kan zijn.

c Waarom kan ook 1,414213562 niet de exacte waarde van $\sqrt{2}$ zijn?

d Wat maakt jouw rekenmachine van $\sqrt{2}$? En wat gebeurt er als je met die benadering in beeld op de kwadraattoets drukt? Hoe komt dat, denk je?

Opgave 8

Schat bij de volgende wortels eerst tussen welke gehele getallen ze liggen. Bereken ze dan met je rekenmachine en rond af op vier decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt{3}$

b $\sqrt{50}$

c $\sqrt{0{,}4}$

d $\sqrt{1000}$

e $\sqrt{5\frac{1}{3}}$

Verwerken

Opgave 9

Bereken de volgende wortels.
Je kunt dit verder oefenen met het **Practicum**.

a $\sqrt{121}$

b $\sqrt{196}$

c $\sqrt{4{,}41}$

d $\sqrt{0{,}0025}$

e $\sqrt{73 - 9}$

f $\sqrt{1\frac{15}{49}}$

g $\sqrt{625} - \sqrt{361}$

h $-\sqrt{0{,}36}$

Opgave 10

Een vierkant heeft een oppervlakte van 20 cm^2.

a Hoe groot is de exacte lengte van elke zijde?

b Tussen welke opeenvolgende gehele getallen ligt de lengte van deze zijde?

c Benader de lengte van de zijden van dit vierkant in drie decimalen nauwkeurig.

d Waarom kan dit nooit meer dan een benadering van de werkelijke lengte zijn?

Opgave 11

Schat bij de volgende wortels eerst tussen welke gehele getallen ze liggen. Bereken ze dan met je rekenmachine en rond af op vier decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt{5}$

b $\sqrt{96}$

c $\sqrt{0{,}0014}$

d $\sqrt{1700}$

e $\sqrt{15\frac{1}{5}}$

f $12 \cdot \sqrt{5}$

Opgave 12

De oppervlakte van een vierkant is 25 cm^2.

a Bereken de omtrek van dit vierkant.

De oppervlakte van een vierkant is 24 cm^2.

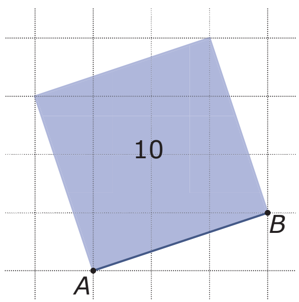
b Bereken de omtrek van dit vierkant in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet: Lengte van een lijnstuk berekenen.

Op een lijnstuk kun je altijd een vierkant maken. Als je dan de oppervlakte van dit vierkant exact kunt bepalen, kun je door worteltrekken ook de lengte van het lijnstuk (de zijde van het vierkant) vaststellen.

Omdat op lijnstuk AB een vierkant van 10 eenheden past, geldt: $AB = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.



Figuur 7

Van lijnstukken tussen roosterpunten kun je zo dus altijd de lengte berekenen.

Opgave 13: Wortels en vierkanten

Je ziet in **Toepassen** hoe je de lengte van een lijnstuk tussen twee roosterpunten bepaalt door er een vierkant op te tekenen.

a Ga na dat het vierkant op AB inderdaad een oppervlakte van 10 heeft.

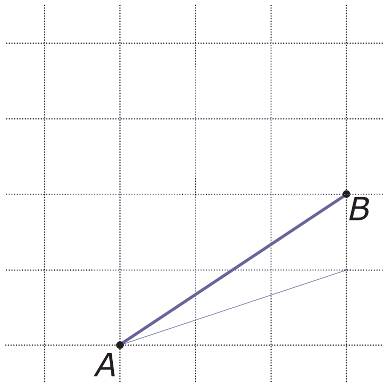
b Bereken op deze manier de lengte van AB als punt B 4 eenheden rechts en 2 eenheden boven punt A ligt.

c Oefen dit met een medeleerling, het zal je later nog van pas komen.

Opgave 14: Lengte van een lijnstuk berekenen

Je ziet hier lijnstuk AB op een rooster.

Teken dit lijnstuk zelf op een cm-rooster en maak er een vierkant op.
Bereken daarmee de lengte van AB in drie decimalen nauwkeurig.



Figuur 8

Testen

Opgave 15

Bereken de volgende wortels.

a $\sqrt{144}$

b $\sqrt{0{,}81}$

c $-\sqrt{10{,}24}$

d $\sqrt{3\frac{1}{16}}$

Opgave 16

Van een vierkant is de oppervlakte 15 cm^2.

a Hoe groot is de exacte lengte van elke zijde van dit vierkant?

b Bereken de lengte van de zijde van het gegeven vierkant in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het worteltrekken zonder rekenmachine**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.