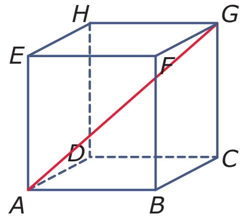
8.3 Lengtes in 3D

Inleiding

Kees kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar in een meubelfabriek wordt gewerkt aan echte ruimtelijke, driedimensionale objecten.
Kees gaat uitzoeken hoe je ook dan de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.
Hoe kun je bijvoorbeeld in zo'n kubus de lengte van een lichaamsdiagonaal uitrekenen?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras gebruiken in berekeningen van lengtes in ruimtelijke figuren;
- dit toepassen in praktische situaties.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- werken met ruimtelijke figuren en de namen van de belangrijkste ruimtelijke figuren;
- de begrippen diagonaal en lichaamsdiagonaal.

Verkennen

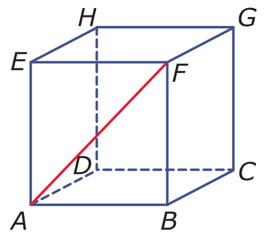
Opgave V1

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Over de voorkant van deze kubus loopt zijvlaksdiagonaal AF.

a Van welke rechthoekige driehoek is AF de hypotenusa?

b Bereken de lengte van AF in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe lang is zijvlaksdiagonaal AC?

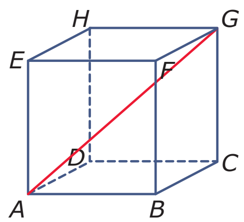


Figuur 2

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Dwars door deze kubus loopt lichaamsdiagonaal AG.

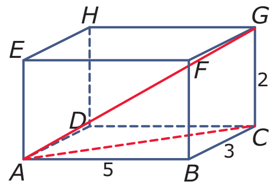
d Van welke rechthoekige driehoek is AG de hypotenusa? (Pak er een draadmodel van een kubus bij.)

e Hoe bereken je de lengte van AG in twee decimalen nauwkeurig?



Figuur 3

Uitleg



Figuur 4

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek.

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de lichaamsdiagonaal AG berekenen.

Je tekent eerst hulplijn AC, driehoek ACG is bij C rechthoekig.
Je berekent eerst de lengte van AC in driehoek ABC.
De stelling van Pythagoras in die driehoek luidt: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Vul de waarden in die zijn gegeven en bereken AC:
$5^2 + 3^2 = AC^2$
$AC^2 = 34$
$AC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

De lengte van AG bereken je nu in ΔACG.
De stelling van Pythagoras in die driehoek is: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Vul de bestaande en gevonden waarden in:
$\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2 = AG^2$, zodat $AG^2 = 38$ en $AG = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Opgave 1

Bekijk de berekening van de lichaamsdiagonaal in een balk in de **Uitleg**. Er wordt twee keer gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras.

a Geef aan in welke driehoek de lengte van AC wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

b Geef aan in welke driehoek de lengte van AG wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

Een andere lichaamsdiagonaal is DF. Je kunt de lengte van deze lichaamsdiagonaal berekenen in ΔEFD.

c Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras in ΔEFD de lengte van lichaamsdiagonaal DF.

Opgave 2

Gegeven is een houten blok in de vorm van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 20$ cm, $AD = 10$ cm en $AE = 5$ cm.

a Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar F. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

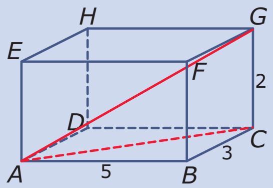
b Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar G.
Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

c Een houtworm boort door deze balk een kortste weg van A naar G. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek. Soms moet je dan eerst een **hulplijn** tekenen...



Figuur 5

Je kunt bijvoorbeeld in een balk $ABCD.EFGH$ de **lichaamsdiagonaal** AG berekenen. Dat kan zo:

1. Eerst hulplijn AC berekenen in de rechthoekige driehoek ABC.
2. Vervolgens AG berekenen in de rechthoekige driehoek ACG.

Voorbeeld 1

Hier zie je een pakje frisdrank. Neem aan dat elk van die pakjes de vorm heeft van een balk van 5,5 cm bij 4,0 cm bij 9,5 cm.

In elk van die pakjes zit vlak bij een hoekpunt van het bovenvlak een plek waar je het rietje in kunt steken. Hoe lang moet zo'n rietje minstens zijn?


Figuur 6

Antwoord

Zeker langer dan de langste afmeting van het pakje. Maar het moet er ook schuin in passen...

Je berekent dus de lengte van een lichaamsdiagonaal.
Voor de diagonaal c van het grondvlak geldt $c^2 = 5{,}5^2 + 4{,}0^2 = 46{,}25$.
Voor de lichaamsdiagonaal d geldt dus $d^2 = 46{,}25 + 9{,}5^2 = 136{,}5$ zodat $d = \sqrt{136{,}5} \approx 11{,}7$ cm.
Het rietje moet minstens 117 mm lang zijn.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Teken zelf zo'n frisdrankpakje $ABCD.EFGH$ met $AB = 5{,}5$ cm, $BC = 4{,}0$ cm en $AE = 9{,}5$ cm.

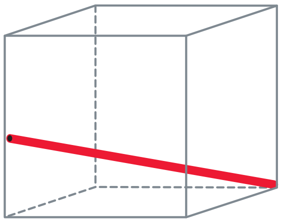
b Bereken nu eerst AC en dan lichaamsdiagonaal AG. Ga na, dat je hetzelfde krijgt als in het voorbeeld.

c Waarom is het bij de berekening van AG niet handig om AC te benaderen?

Opgave 4

In een glazen plastic bakje is een dun rietje gevallen. Het bakje is een kubus met ribben van 15 cm en het rietje is 23 cm. De éne kant van het rietje zit precies in een hoek van het bakje, de andere kant rust tegen een opstaande ribbe.

Op welke hoogte boven de bodem van het bakje?



Figuur 7

Voorbeeld 2

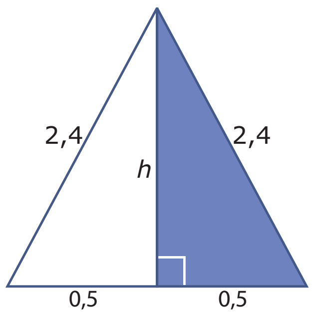
Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren. Nu scharniert hij alleen halverwege. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt 4,80 m. In deze stand staan de poten 1 m uit elkaar.

Hoe hoog komt de ladder nu?

Figuur 8

Antwoord

Bekijk de in het midden scharnierende ladder van de zijkant. Je ziet dan een gelijkbenige driehoek met een basis van 1 m en benen van 2,40 m. De hoogte h is een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek.



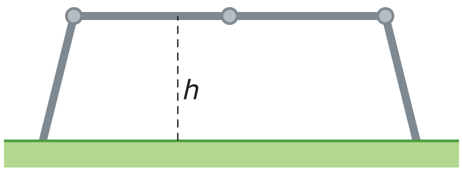
Figuur 9

De stelling van Pythagoras levert op $0{,}5^2 + h^2 = 2{,}4^2$.

En dus is $h = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{5{,}51} \approx 2{,}35$ m.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe de hoogte van een scharnierende ladder wordt uitgerekend. Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren waarna de ladder in die stand kan worden vastgezet. Die drie plaatsen zitten op gelijke afstanden van elkaar. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt 4,80 m.



Figuur 10

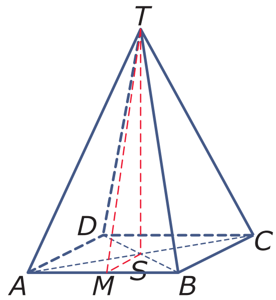
In het midden scharniert de ladder niet, in de beide andere scharnierpunten wel. (Zie figuur.) De poten van de ladder staan op de grond 3 m uit elkaar. Er ontstaat een soort van loopbrug. Op welke hoogte boven de grond?

Voorbeeld 3

Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en opstaande ribben van 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een vierkant is en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.

Bereken de hoogte TM van het voorvlak van deze piramide.

Bereken de hoogte TS van deze piramide.



Figuur 11

Antwoord

Het voorvlak is ΔABT met hoogte TM waarin M het midden van AB is.
Ga na dat $TM^2 + 2^2 = 6^2$.

En dus is $TM^2 = 32$, zodat $TM = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ cm.

Nu kun je TS berekenen in de rechthoekige driehoek MST.

Ga na, dat $TS = \sqrt{28} \approx 5{,}29$ cm.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de lengte van TM berekent.

a Welke driehoek wordt gebruikt en welke hoek is dan de rechte hoek?

b Voer zelf de berekening van TM uit.

c Welke driehoek wordt gebruikt voor de berekening van TS en welke hoek is dan de rechte hoek?

d Voer zelf de berekening van TS uit.

Opgave 7

Je kunt in **Voorbeeld 3** de lengte van TS ook op een andere manier berekenen.

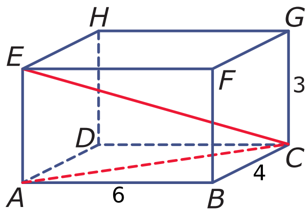
Laat zien hoe.

Opgave 8

Maak van de piramide in **Voorbeeld 3** een uitslag.

Verwerken

Opgave 9



Figuur 12

Bereken van deze balk de lichaamsdiagonaal EC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van 1,5 m, een diepte van 2 m en een hoogte van 2,5 m.

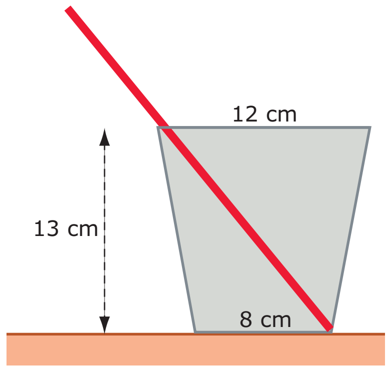
a Hoe lang is de langste onbuigzame paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

b Je hebt een vlak rechthoekig paneel met een breedte van 1,45 en een lengte van 3,15 m. Kan dat in de lift?

Opgave 11

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?

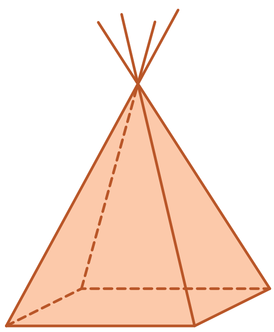


Figuur 13

Opgave 12

Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van 50 m^2. De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

Hoe hoog is deze wigwam?



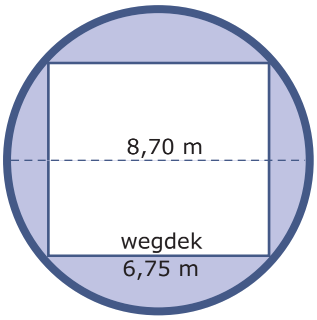
Figuur 14

Opgave 13

De Waaslandtunnel is de oudste voertuigentunnel onder de Schelde die Antwerpen verbindt met de linkeroever van die rivier. De tunnel bestaat uit een cilindervormige buis met een (inwendige) diameter van 8,70 m. Daarin is een wegdek aangelegd met een breedte van 6,75 m. Je ziet hier een vooraanzicht van de tunnelbuis. De rechthoek in de buis stelt de ruimte voor waar het verkeer kan rijden, de rest is afgesloten en bestemd voor allerlei voorzieningen zoals luchtverversing, elektra, e.d.

a Bereken de hoogte van deze rechthoek in cm nauwkeurig.

b Hoeveel procent van de tunnelbuis is niet bestemd voor het verkeer?



Figuur 15

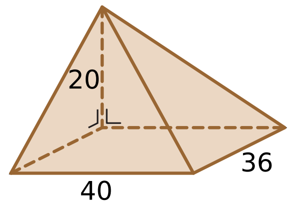
Opgave 14

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 200$, $BC = 80$ en $CG = 60$ mm. Punt P is het midden van ribbe AB.

Onderzoek of driehoek HPG rechthoekig is.

Toepassen

De meubelmakerij maakt een tuinkast. De klant wil die in een hoek van zijn huis tegen de muur plaatsen. Er moet een schuin dakje opkomen waarvan de hoogste punt precies in die hoek zit. De kast wordt 40 cm breed, 36 cm diep en 180 cm hoog. Daar bovenop komt het schuine dakje dat je hiernaast ziet. Om elk vlakje te kunnen uitzagen worden alle rechte hoeken vastgesteld en de lengtes van de schuin lopende ribben berekend.



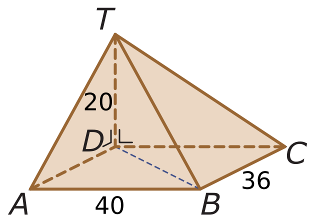
Figuur 16

Kees ziet de stelling van Pythagoras alweer voorbij komen...

Opgave 15: Het schuine dakje

Je ziet hier het schuine dakje in **Toepassen** nog eens.
Kees heeft letters bij de hoekpunten gezet.

De figuur is een piramide waarvan de top T recht boven hoekpunt D zit.



Figuur 17

a Noem drie rechthoekige driehoeken met DT als zijde.

b Bereken de lengtes van AT en CT in mm nauwkeurig.

c Leg uit waarom dat zo is.

d Hoe lang wordt ribbe BT? Geef je antwoord weer in mm nauwkeurig.

Opgave 16: De bolling van de Aarde

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

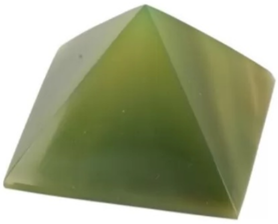
b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

Testen

Opgave 17

Deze piramide is van groen gekleurde agaat gemaakt. Het grondvlak is een vierkant en de top zit recht boven het midden van dat vierkant.
De hoogte van van deze piramide is het lijnstuk tussen de top en het midden van het grondvlak. Alle ribben zijn 30 mm lang.

Bereken de hoogte van deze piramide.



Figuur 18

Opgave 18

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 3$.

a Bereken de lengte van zijvlaksdiagonaal DG in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.