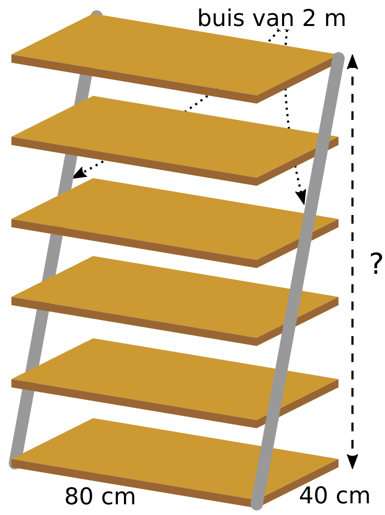
8.2 Lengtes berekenen

Inleiding

De meubelmaker heeft een opdracht gekregen voor een wat bijzondere boekenkast. Hij heeft zelf nog twee stalen buizen van 2 m lengte liggen en de klant heeft nog zes boekenplanken van 80 cm bij 40 cm liggen. Je ziet hier hoe de boekenkast moet gaan worden. Tussen de buizen worden strips gelast waar de planken op worden bevestigd. Op de bovenste plank kunnen geen zware boeken, alleen een leuke vaas of zoiets. De boekenkast komt tegen een verticale muur.

De vraag is nu wel hoe ver de planken uit elkaar moeten. Kees vertelt hem dat je ook daarvoor de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras;
- de omgekeerde stelling van Pythagoras gebruiken om rechte hoeken te maken.

Voorkennis

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken toepassen;
- werken met coördinaten.

Verkennen

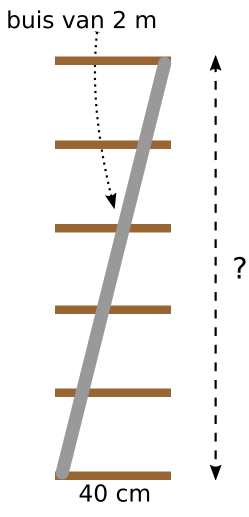
Opgave V1

Dit is een zijaanzicht van de boekenkast zoals hij tegen een muur staat. De zes planken hebben een lengte van 80 cm en een breedte van 40 cm. De twee stalen buizen zijn 2 m lang.

a Hoe kun je hier de stelling van Pythagoras toepassen om de hoogte te berekenen?

b Bereken de hoogte h van de totale boekenkast in mm nauwkeurig.

c Hoeveel tussenruimte krijgen de planken?



Figuur 2

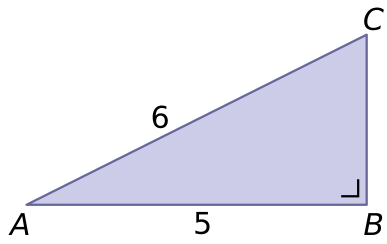
Uitleg

Als ΔABC een rechthoekige driehoek is, dan geldt de stelling van Pythagoras.
Omdat in deze driehoek AC de langste zijde (hypotenusa) is, geldt

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

ofwel:

$5^2 + BC^2 = 6^2$



Figuur 3

Hieruit kun je BC^2 berekenen door aan beide zijden 5^2 af te halen:

$BC^2 = 6^2 - 5^2$.

Zo vind je $BC = \sqrt{11} \approx 3{,}32$.

Je ziet, dat je de stelling van Pythagoras ook kunt gebruiken om rechthoekszijden uit te rekenen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Voer zelf de berekening van zijde BC uit.

Een rechthoekige driehoek KLM heeft een rechte hoek bij M en $KL = 5$ cm en $KM = 3$ cm.

b Maak een schets van deze driehoek en bereken de lengte van LM.

c Bereken hoe lang PR is in mm nauwkeurig.

Opgave 2

In elke rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras. Omgekeerd kun je dit gebruiken om na te gaan of een driehoek rechthoekig is. Dit doe je door te controleren of $a^2 + b^2 = c^2$ klopt als de zijden van de driehoek a, b en als langste c zijn.

a Van ΔABC is $AB = 12$, $BC = 5$ en $AC = 13$. Laat zien, dat deze driehoek rechthoekig is.

b Van ΔDEF is $DE = 12$, $EF = 8$ en $DF = 10$. Laat zien, dat deze driehoek niet rechthoekig is.

Theorie en voorbeelden

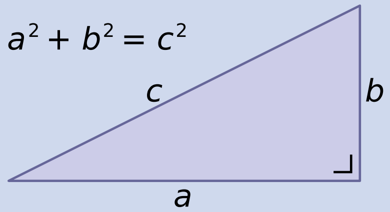
Om te onthouden

In het algemeen geldt in elke rechthoekige driehoek de **stelling van Pythagoras**:

$(\text{rechthoekzijde})^2 + (\text{rechthoekzijde})^2 = (\text{hypotenusa})^2$

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$



Figuur 4

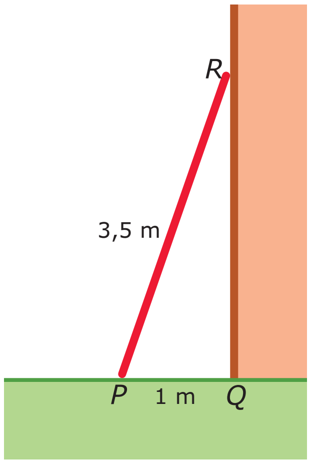
Je kunt deze stelling goed gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven. Bekijk ook de voorbeelden.

Ook de **omgekeerde stelling van Pythagoras** is waar: als in een driehoek de stelling van Pythagoras klopt, dan is de driehoek rechthoekig.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: ladder tegen muur

Iemand zet een ladder van 3,5 m schuin tegen de muur van een huis. Hier zie je een zijaanzicht van de situatie. Het punt waar de ladder op de grond staat is 1 m van de muur verwijderd. Hoe hoog komt de ladder?



Figuur 5

Antwoord

Je gaat er van uit dat de muur loodrecht op de grond staat, dus dat ΔPQR een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij Q. De stelling van Pythagoras in ΔPQR is:

$(\text{rechthoekzijde})^2 + (\text{rechthoekzijde})^2 = (\text{hypotenusa})^2$

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

Je weet: $PQ = 1$ m en $PR = 3{,}5$ m.
Dan krijg je: $1^2 + QR^2 = 3{,}5^2$.
Dit geeft:
$QR^2 = 3{,}5^2 - 1^2 = 11{,}25$.
En dus is:
$QR = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ m.

Opgave 3

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 1**.

a Zet de voet van de ladder op 1,5 m van de muur. Hoe hoog komt hij nu? Geef het antwoord weer in twee decimalen nauwkeurig.

b Je wilt dat de bovenkant van je ladder op 3 m hoogte boven de grond tegen de muur komt. Hoeveel cm moet je de voet van de ladder van de muur zetten?

Opgave 4

Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 16$ cm en $PR = 30$ cm.

a Schets deze driehoek en schat de lengte van QR.

b Bereken de lengte van QR in twee decimalen nauwkeurig.

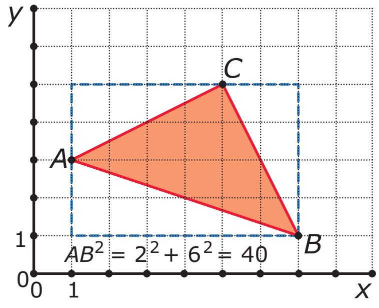
Opgave 5

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

Maak er één waarvan twee zijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.

Voorbeeld 2

Met de stelling van Pythagoras kun je ook lengtes van lijnstukken op een rooster berekenen. Je maakt dan een rechthoekige driehoek op de roosterlijnen. Hier zie je hoe de lengte van AB kan worden berekend.
Om te onderzoeken of deze ΔABC een rechte hoek heeft, ga je na of de stelling van Pythagoras in die driehoek geldt. Als het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is de hoek tegenover die langste zijde recht.



Figuur 6

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras in een assenstelsel

Opgave 6

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe de lengte van AB van een roosterfiguur wordt uitgerekend. Neem een blad roosterpapier.

a Maak daarop een assenstelsel met de punten $A(1,3)$, $B(7,1)$ en $C(5,5)$. Bereken zelf de lengte van AC en van BC.

b Je kunt nu het berekenen van lijnstukken en de zijden van een driehoek oefenen door andere punten A, B en C te kiezen. Doe dat tot je geen fouten meer maakt.

Gebruik de applet van **Voorbeeld 2**.

Opgave 7

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**. Je hebt al geleerd hoe je de andere twee zijden berekend.

a Waarom weet je zeker dat de ΔABC van het voorbeeld rechthoekig is?

b Maak nu ΔABC met $A(0,3)$, $B(10,1)$ en $C(9,5)$. Waarom weet je zeker dat deze driehoek niet rechthoekig is?

c Maak nu ΔABC met $A(0,3)$, $B(9,1)$ en $C(8,5)$. Is deze driehoek rechthoekig?

Opgave 8

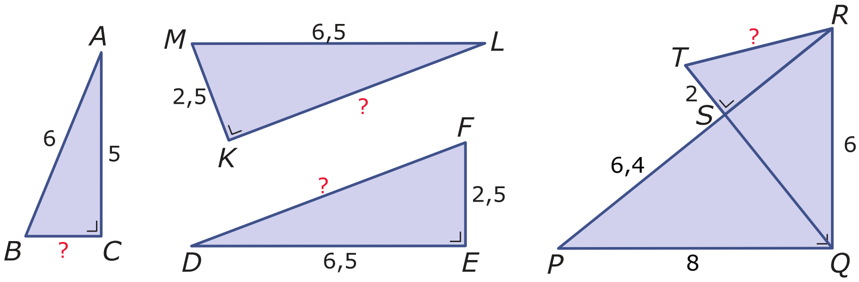
a Teken op papier een driehoek met zijden van 4 cm, 5 cm en 6 cm. Waarom weet je zeker dat het geen rechthoekige driehoek is?

b Teken op papier een driehoek met zijden van 5 cm, 12 cm en 13 cm. Waarom weet je zeker dat het een rechthoekige driehoek is?

Verwerken

Opgave 9

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.



Figuur 7

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

Opgave 10

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 5,5 m boven de begane grond tegen de muur komen. De ladder is helemaal uitgeschoven 6 m lang.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe ver hij deze ladder van de voet van de muur moet zetten.

Opgave 11

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 12

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

b Driehoek DEF met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

c Driehoek GHI met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

d Driehoek KLM met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

Opgave 13

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer 17,5 nodig per m^2 dak.

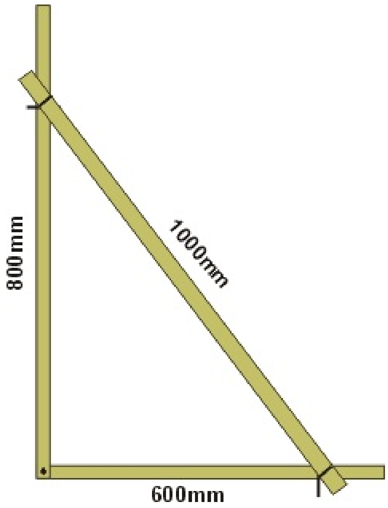
Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

Figuur 8

Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.

- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met een draadnagel, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af $(3 \cdot 200)$ en op de andere 800 mm $(4 \cdot 200)$.
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af $(5 \cdot 200)$.
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.



Figuur 9

Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. **Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.**

Opgave 14: 3,4,5-steek

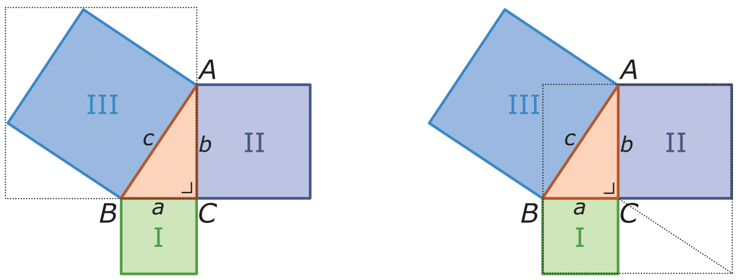
Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

a Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

b Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uit maakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.

Opgave 15: Altijd checken of iets echt waar is...

Je kunt nu de stelling van Pythagoras wel gebruiken, maar hoe zeker ben je er van dat hij altijd correct is? Bekijk daartoe deze twee figuren.



Figuur 10

a Bekijk eerst de linker figuur. Uit welke vijf delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?

b Bekijk nu de rechter figuur. Uit welke zes delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?

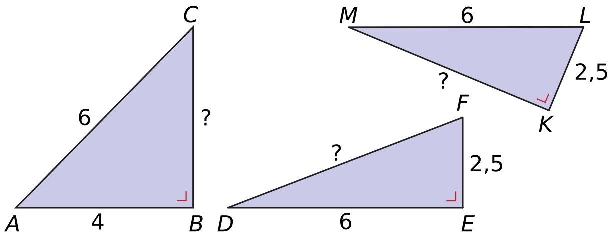
c Welke conclusie kun je uit het voorgaande trekken?

d Heb je nu de stelling van Pythagoras afdoende bewezen?

Testen

Opgave 16

Hier zie je drie figuren met rechthoekige driehoeken.



Figuur 11

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

Opgave 17

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 26$, $BC = 24$ en $AC = 10$.

b Driehoek DEF met $DE = 3$, $DF = 5$ en $EF = 3$.

Opgave 18

Iemand heeft een bijzonder tafelkleed gekocht en wil er speciaal een tafel voor laten maken. Het is een zuiver rond tafelkleed met een diameter van 2,40 meter. De tafel moet zuiver vierkant worden.

Hoe groot mag de zijde van deze tafel maximaal zijn om volledig bedekt te worden door het kleed? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Practicum

In deze applet kun je de punten A, B en C verplaatsen. Als je twee zijden van ΔABC een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras gebruiken

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.