

3.5 Ongelijkheden

Inleiding

Elektrisch rijden levert minder vervuiling op dan een verbrandingsmotor. Maar wat is goedkoper, elektrisch rijden of nog ouderwets rijden op benzine?

Henk gaat dat eens voor zijn moeder uitzoeken.

Hij vergelijkt de auto van zijn moeder met de benzineversie ervan.

Vanaf hoeveel kilometer per maand is de elektrische versie goedkoper?

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

Elektrisch rijden levert minder vervuiling op dan een verbrandingsmotor. Maar wat is goedkoper, elektrisch rijden of nog ouderwets rijden op benzine?

Henk gaat dat eens uitzoeken.

Hij vergelijkt de auto van zijn moeder met de benzineversie ervan en gebruikt de gegevens in de figuur. Hij neemt voor het aantal km dat ze maandelijks rijdt de variabele a .

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 2

- Leg uit dat Henk's vraag kan worden vertaald naar $360 + 0,07 \cdot a < 220 + 0,12 \cdot a$.
- Hoe zou je de ongelijkheid bij a oplossen?

Uitleg

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn de vaste kosten (machines, gebouwen, enzovoort) berekend op € 24000. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.

“Hoeveel liter moet hij verkopen om winst te gaan maken?”

Je begint met het opstellen van de formules voor de kosten en de opbrengst.

De productiekosten K hangen af van het geproduceerde aantal liters a : $K = 24000 + 3,50a$.

Als alle geproduceerde verf verkocht wordt, hangt de opbrengst R ook van a af: $R = 7,20a$.

Om winst te maken, moet de opbrengst hoger zijn dan de kosten, dus $R > K$.

Vul je voor R en K de betreffende formules in, krijg je een lineaire ongelijkheid:

$$7,20a > 24000 + 3,50a$$


Deze lineaire ongelijkheid moet je oplossen.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende lineaire vergelijking op:

$$7,20a = 24000 + 3,50a$$

Voor zo'n vergelijking gebruik je de balansmethode:

$$\begin{array}{l} 7,20a = 24000 + 3,50a \\ 3,70a = 24000 \\ a = \frac{24000}{3,70} \approx 6486,5 \end{array}$$


 beide zijden $-3,50a$
 beide zijden delen door $3,70$

Als de fabrikant alleen hele liters verkoopt, dan is de opbrengst bij 6487 liter iets groter dan de kosten.

Dan maakt de fabrikant dus winst. Nog meer verkopen en hij maakt meer winst.

De oplossing van de lineaire ongelijkheid $7,20a > 24000 + 3,50a$ is dus $a \geq 6487$.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg**. Er wordt gesteld dat je de vergelijking $7,20a = 24000 + 3,50a$ kunt oplossen met de balansmethode.

- a Waarom hoort bij de aan het begin van de uitleg gestelde vraag een ongelijkheid?
- b De oplossing van het probleem is dat het aantal geproduceerde liters 6487 liter of meer zou moeten zijn. Ga na dat bij 6487 liter inderdaad winst wordt gemaakt en bij 6486 niet.
- c Je kunt de oplossing van een ongelijkheid aflezen uit de grafieken van R en K . Maak die grafieken en leg uit hoe je de oplossing afleest.

Opgave 2

Voor de productie van een nieuw soort verf geldt dat de kosten per liter € 4,00 bedragen. De vaste kosten zijn € 21000,00. De fabrikant verkoopt zijn verf voor € 6,40 per liter.

- a Stel de formule op voor de productiekosten K en de opbrengst R voor wanneer alle verf wordt verkocht. Beide variabelen zijn afhankelijk van het aantal verkochte liters verf a .
- b Hoeveel liter moet de fabrikant verkopen voordat hij winst gaat maken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

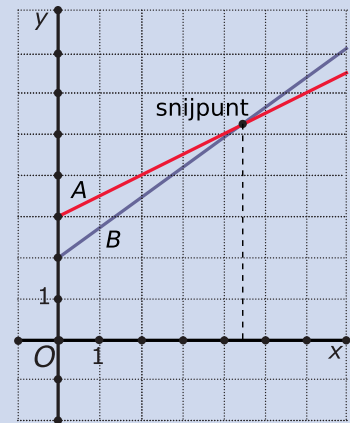
Soms heb je met twee (of meer) lineaire verbanden te maken en wil je weten wanneer de uitkomsten bij het éne verband meer, minder zijn dan die bij het andere verband. Je krijgt dan een **lineaire ongelijkheid**.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende **lineaire vergelijking** op om het snijpunt van beide grafieken te berekenen.

Heb je de vergelijking opgelost, dan kijk je naar de grafieken om antwoord op de gestelde vraag te kunnen geven.

In de figuur is $A > B$ als je links van het snijpunt zit, dus als $x < 4,3$.

Eventueel kun je wat getallen om het snijpunt heen proberen.



Figuur 3

Voorbeeld 1

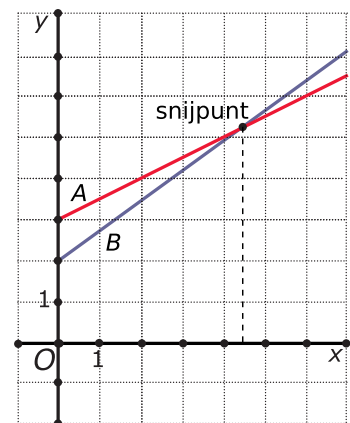
Je ziet hier de grafieken van twee lineaire verbanden $A = 0,5 \cdot x + 3$ en $B = 0,74 \cdot x + 2$.

Los in twee decimalen nauwkeurig de ongelijkheid $0,5 \cdot x + 3 < 0,74 \cdot x + 2$ op.

Antwoord

Bereken eerst de x -waarde van het snijpunt van beide grafieken:

$$\begin{aligned}
 0,5 \cdot x + 3 &= 0,74 \cdot x + 2 && \text{beide zijden } -3 \\
 0,5 \cdot x &= 0,74 \cdot x - 1 && \text{beide zijden } -0,74 \cdot x \\
 -0,24 \cdot x &= -1 && \text{beide zijden delen door } -0,24 \\
 x &= -1 / -0,24 = 4,1666\dots
 \end{aligned}$$



Figuur 4

In de grafiek zie je dat de grafiek van A onder die van B ligt als je rechts van het snijpunt zit. Dat betekent dat $A < B$ als $x > 4,1666\dots$

Op twee decimalen nauwkeurig is de oplossing: $x > 4,17$.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je een lineaire ongelijkheid oplost.

- Controleer dat de formules en de grafieken overeen komen.
- Reken zelf de oplossing van de vergelijking na.
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $0,5 \cdot x + 3 > 0,74 \cdot x + 2$

Opgave 4

Je wilt de ongelijkheid $20 + 1,6 \cdot x > 30 + 0,8 \cdot x$ oplossen.

- Maak eerst de grafieken van $L = 20 + 1,6 \cdot x$ en $R = 30 + 0,8 \cdot x$ in één figuur.
- Los de bijbehorende vergelijking op.
- Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Voorbeeld 2

Deze grafieken laten zien hoe twee cilindervormige kaarsen opbranden. L is de lengte van de kaars in centimeters en t is de brandtijd in uren.

Bereken in minuten nauwkeurig wanneer kaars I langer is dan kaars II.

Antwoord

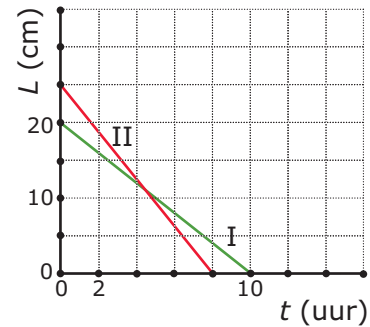
Stel bij elke grafiek een formule op:

- kaars I: $L = 20 - 2t$
- kaars II: $L = 25 - 3,125t$

Beide kaarsen zijn even lang als: $20 - 2t = 25 - 3,125t$. Oplossen geeft:

$$\begin{aligned}
 20 - 2t &= 25 - 3,125t && \text{beide zijden } -20 \\
 -2t &= 5 - 3,125t && \text{beide zijden } +3,125t \\
 1,125t &= 5 && \text{beide zijden } : 1,125 \\
 t &= \frac{5}{1,125} = 4,4444\dots
 \end{aligned}$$

Beide kaarsen zijn even lang na ongeveer 4 uur en 27 minuten (want $0,4444\dots \cdot 60 \approx 27$). En dus is kaars I langer na 4 uur en 27 minuten.



Figuur 5

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je kunt berekenen op welk tijdstip twee verschillende cilindervormige kaarsen (die gelijkmatig opbranden) even lang zijn als ze tegelijk worden aangestoken.

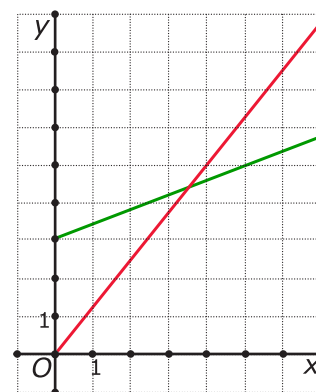
- Hoe zie je aan de grafiek dat beide kaarsen tegelijk worden aangestoken?
- Stel zelf de formules op voor de lengte L van deze kaarsen.
- Met de balansmethode wordt het tijdstip berekend waarop beide kaarsen even lang zijn. Bereken dit tijdstip in seconden nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 6

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden $y = 3 + 0,40 \cdot x$ en $y = 1,25 \cdot x$.

- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $3 + 0,40 \cdot x = 1,25 \cdot x$.
- Los op: $3 + 0,40 \cdot x < 1,25 \cdot x$.
- Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x .



Figuur 6

Opgave 7

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

- gebied A: $K = 36 + 1,80v$
- gebied B: $K = 48 + 1,55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

- Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?
- Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

Opgave 8

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 1 km een daling van de temperatuur van ongeveer 6°C betekent.

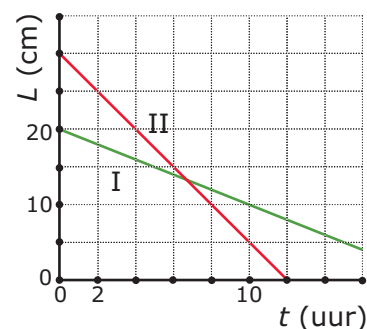
Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van 16°C .

- Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?
- Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in $^\circ\text{C}$ en h ?
- Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: "Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?"
- Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Opgave 9

Je ziet de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die tegelijk worden aangestoken.

- Stel bij elk van deze grafieken een formule op.
- Na hoeveel minuten is kaars I langer dan kaars II?



Figuur 7

Toepassen

Op de [website van de ANWB](#) stond begin 2022 nog een vergelijking van twee versies van de Renault Clio:

- de benzineversie kostte € 457 per maand
verbruik 1 liter benzine per 15 km, met benzineprijs € 1,51 per liter
- de dieselversie kostte € 580 per maand
verbruik 1 liter diesel per 20 km, met dieselprijs € 1,24 per liter



Figuur 8

Henk rekent dit voorbeeld even door. Later gaat hij zoeken naar meer actuele prijzen. Welke auto is voordeliger?

Opgave 10: Rekenvoorbeeld ANWB

Gebruik de gegevens uit [Toepassen](#) hierboven.

- Hoeveel kost het rijden met de benzineversie per km? En hoeveel is dit voor de dieselversie?
- De kosten K per maand (in euro) hangen af van het aantal gereden km. Geef voor beide versies een formule voor K .
- Voor welke waarden van a is de dieselversie goedkoper dan de benzineversie?

Opgave 11: De auto van Henk's moeder

Henk vergelijkt de auto van zijn moeder met de benzineversie ervan en gebruikt de gegevens in de figuur. Hij neemt voor het aantal km dat ze maandelijks rijdt de variabele a .

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 9

Bereken nu met behulp van een ongelijkheid vanaf hoeveel km/maand de elektrische versie goedkoper is.

Testen

Opgave 12


Voor de productie van een nieuw soort telefoonhoesje bedragen de productiekosten per hoesje € 0,85. De vaste kosten bedragen € 11000. De fabrikant verkoopt de hoesjes voor € 2,80 per stuk.

- Stel een formule op voor de productiekosten K en de opbrengst R voor wanneer de fabrikant alle hoesjes verkoopt. Beide zijn afhankelijk van het aantal verkochte hoesjes a .
- Hoeveel hoesjes moet de fabrikant verkopen voordat hij winst gaat maken?



© 2023

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostroaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
