3.4 Balansmethode

Inleiding

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze in haar nieuwe functie veel voor haar werkgever met de auto op pad is, legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07. Ze krijgt van haar werkgever een reiskostenvergoeding van € 0,19 per km.

Henk gaat uitrekenen vanaf hoeveel km daarmee al haar autokosten gedekt zijn.
Hij gebruikt daarbij het balansmodel: op beide schaaltjes moet evenveel liggen om evenwicht te hebben.
Hoe werkt dat balansmodel?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking zien als een balans waarvan aan beide zijden van het isgelijkteken de uitkomst gelijk moet blijven;
- een vergelijking oplossen met de balansmethode.

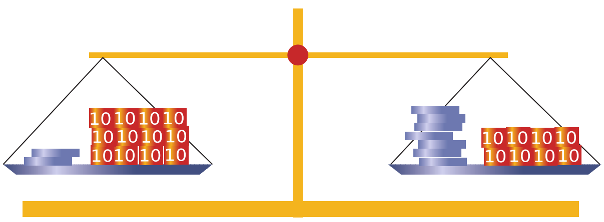
Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen;
- bij een formule een rekenschema en een terugrekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Iemand heeft 9 precies gelijke munten. Op een balans houden 2 van die munten en 12 gewichten van 10 gram aan de éne kant de 7 andere munten en 8 gewichten van 10 gram aan de andere kant precies in evenwicht.



Figuur 2

Hoe zwaar zijn die munten?

Uitleg

Bij het oplossen van een vergelijking kun je hem opvatten als een balans in evenwicht. Hier zie je hoe zo de vergelijking $5 \cdot g + 1 = 2 \cdot g + 13$ kan worden opgelost. Het is een vergelijking waar maar één variabele in voorkomt, namelijk de g. Je kunt je die variabele voorstellen als een (nog onbekend) gewichtje. Het maalteken $\cdot$ wordt vaak weggelaten.

$$\begin{aligned} 5 \cdot g + 1 &= 2 \cdot g + 13 && \text{beide zijden } -1 \\ 5 \cdot g &= 2 \cdot g + 12 && \text{beide zijden } -2 \cdot g \\ 3 \cdot g &= 12 && \text{beide zijden } /3 \\ g &= 12/3 = 4 \end{aligned}$$

De **oplossing** $g = 4$ kun je controleren door in de gegeven vergelijking voor g het getal 4 te nemen: $5 \cdot 4 + 1 = 21 = 2 \cdot 4 + 13$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet hoe je een vergelijking kunt oplossen met de balansmethode.

a In **Verkennen V1** ging het over munten. Ga na dat bij de puzzel de vergelijking $7 \cdot g + 80 = 2 \cdot g + 120$ past. Hierin is g het aantal gram dat een munt weegt.

b Deze vergelijking kun je oplossen met behulp van de balansmethode. Hoeveel gram kun je aan beide kanten weghalen zonder het evenwicht te verstoren? Welke vergelijking krijg je dan?

c Hoeveel munten kun je aan beide zijden weghalen zonder het evenwicht te verstoren? Welke vergelijking krijg je dan? Hoe kun je nu berekenen hoe zwaar elke munt is?

d Hoe kun je nu de vergelijking oplossen en berekenen hoe zwaar elke munt is?

e Waarom kun je deze vergelijking niet oplossen door terugrekenen?

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de balansmethode.

a $7 \cdot g + 2 = 3 \cdot g + 8$

b $6 \cdot g + 2100 = 10 \cdot g + 1500$

Opgave 3

Bij de vergelijking $6 \cdot g - 20 = 4 \cdot g + 4$ kun je je maar moeizaam een balans voorstellen vanwege het minteken. Toch kun je ook nu de balansmethode toepassen.

a Hoeveel keer g kun je aan beide zijden aftrekken? Welke vergelijking krijg je dan?

b Tel nu aan beide zijden 20 op. Welke vergelijking krijg je?

c Bereken nu g.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het **systematisch oplossen van een vergelijking** kun je vaak gebruik maken van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijkteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijkteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

Figuur 3

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe. Maar daarover later...

Voorbeeld 1

Een vergelijking met één variabele oplossen betekent: zoeken naar de waarde van die variabele waarvoor de vergelijking waar wordt gemaakt. De balansmethode helpt je daar bij.

Los op: $25 + 4{,}5 \cdot x = 3 \cdot x + 40$.

Antwoord

$$\begin{aligned} 25 + 4{,}5 \cdot x &= 3 \cdot x + 40 && \text{beide zijden } -25 \\ 4{,}5 \cdot x &= 3 \cdot x + 15 && \text{beide zijden } -3 \cdot x \\ 1{,}5 \cdot x &= 15 && \text{beide zijden } /1{,}5 \\ x &= 15/1{,}5 = 10 \end{aligned}$$

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de balansmethode gebruikt om een vergelijking op te lossen. Los nu zelf op deze manier de volgende vergelijkingen op.

a $7 \cdot g + 6 = 5 \cdot g + 15$

b $8 \cdot g - 15 = 5 \cdot g + 21$

c $8 \cdot g - 15 = 5 \cdot g$

d $12 - 4 \cdot g = 6 \cdot g + 2$

Opgave 5

Je ziet hier hoe een vergelijking wordt opgelost.
Merk op dat als dan kan de maaltekens worden weggelaten, dus $5g$ is eigenlijk $5 \cdot g$, enz.

a Schrijf bij elke stap op wat er is gebeurd.

$$\begin{aligned} 5g + 12 &= 3g + 7 \\ 2g + 12 &= 7 \\ 2g &= -5 \\ g &= -2{,}5 \end{aligned}$$

b Schrijf bij elke stap op wat er is gebeurd.

$$\begin{aligned} 1{,}2g - 8 &= 0{,}8g + 12 \\ 1{,}2g &= 0{,}8g + 20 \\ 0{,}4g &= 20 \\ g &= 50 \end{aligned}$$

Opgave 6

Oefen nu het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{1}{4}p + \frac{1}{12} = 2 - \frac{5}{6}p$.

Antwoord

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{12} &= 2 - \tfrac{5}{6}p && \text{beide zijden } \times 12 \\ 3p + 1 &= 24 - 10p && \text{beide zijden } -2 \\ 3p &= 23 - 10p && \text{beide zijden } +10p \\ 13p &= 23 && \text{beide zijden } /13 \\ p &= 23/13 = \tfrac{23}{13} \end{aligned}$$

Opgave 7

Bekijk in hoe je een vergelijking met breuken kunt oplossen met de balansmethode.

a Waarom wordt in de eerste stap aan beide zijden met 12 vermenigvuldigd?

b De tweede en de derde stap had je ook wel kunnen omwisselen. Laat zien hoe de oplossing er dan uit ziet.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op.

a $\frac{2}{7}x + 4 = 3 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{1}{3}p + \frac{1}{4} = p - \frac{5}{6}$

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op. Gebruik waar nodig de balansmethode, maar terugrekenen mag natuurlijk ook.

a $12 \cdot g + 3 = 7 \cdot g + 18$

b $10 + 6 \cdot g = 2 + 8 \cdot g$

c $12 - 4g = 36 + 2g$

d $5 \cdot g = g + 8$

e $5200 + 15 \cdot g = 600$

f $-6 \cdot g + 55 = 4 \cdot g - 25$

g $3 - g = 6 + 2g$

h $-\frac{1}{2}g + \frac{7}{2} = 2g - 5\frac{1}{2}$

i $320 + 0{,}5g = 950 - 1{,}25g$

j $17 = 4 - 11g$

Opgave 10

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor 10 cent per kopie gebruik van maken.
De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 cent.

De vraag is: "Vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruiken van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?".

Bij deze vraag past de vergelijking $150 + 0{,}075 \cdot a = 0{,}10 \cdot a$.
Hierin is a het aantal kopieën per maand.

a Leg uit dat die vergelijking bij de vraag past.

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag?

Opgave 11

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.

a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur is deze kaars nog 5 cm lang?"

b Waarom kun je deze vergelijking zowel met de balansmethode als door terugrekenen oplossen?

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag?

Opgave 12

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.
Voor een tweede kaars geldt dat hij bij aansteken 30 cm lang is en elk uur 3,25 cm korter wordt als hij opbrandt. Beide kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken.

a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur zijn beide kaarsen even lang?"

b Waarom kun je deze vergelijking alleen met de balansmethode oplossen?

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze in haar nieuwe functie veel voor haar werkgever met de auto op pad is, legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07. Ze krijgt van haar werkgever een reiskostenvergoeding van € 0,19 per km.

Figuur 4

Henk gaat uitrekenen vanaf hoeveel km daarmee al haar autokosten gedekt zijn.
Economen noemen dit het **break-even-point**. Dat is het punt waarin de opbrengst gelijk is aan de totale kosten.

Opgave 13: Reiskostenvergoeding

Bij zie je welke kosten en welke vergoeding Henk's moeder heeft. Noem haar werkkilometers a.

a Stel een de vergelijking op die Henk gaat oplossen.

b Los deze vergelijking op.

c Bij hoeveel werkkilometers per maand springt Henk's moeder uit de kosten?

d Zijn daarmee ook echt alle autokosten per maand gedekt?

Opgave 14: Break-even-point

Voor het aantal liters ActivExtra x dat per maand wordt verkocht geldt: $R = 1{,}15 \cdot x$.
Ook het aantal maandelijks geproduceerde liters is x liter en er geldt: $K = 25000 + 0{,}80 \cdot x$.
Maak je een grafiek van R en een grafiek van K in één figuur, dan is het break-even-point het snijpunt van beide.

a Met welke vergelijking kun je dat snijpunt berekenen?

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Vanaf welk aantal liter gaat de firma die ActivExtra produceert hieraan winst maken?

Testen

Opgave 15

Los de vergelijkingen op.

a $24 \cdot a + 240 = 4 \cdot a + 640$

b $0{,}5 \cdot b + 12 = 3 + 1{,}7 \cdot b$

c $49{,}6 - 1{,}06c = 0{,}6c - 50{,}0$

d $\frac{1}{3}d + 1 = \frac{5}{6}d - \frac{4}{9}$

Opgave 16

Een bos tulpen wordt in een vaas met 1,5 liter water gezet. Een bos rozen wordt in een vaas met 1,8 liter gezet. De tulpen hebben per dag 0,05 liter water nodig en de rozen 0,08 liter. Je wilt weten na hoeveel dagen er evenveel water in de vazen zit.

a Noem het aantal dagen d. Leg uit waarom geldt $1{,}5 - 0{,}05 \cdot d = 1{,}8 - 0{,}08 \cdot d$.

b Los de vergelijking op en beantwoord de vraag.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.