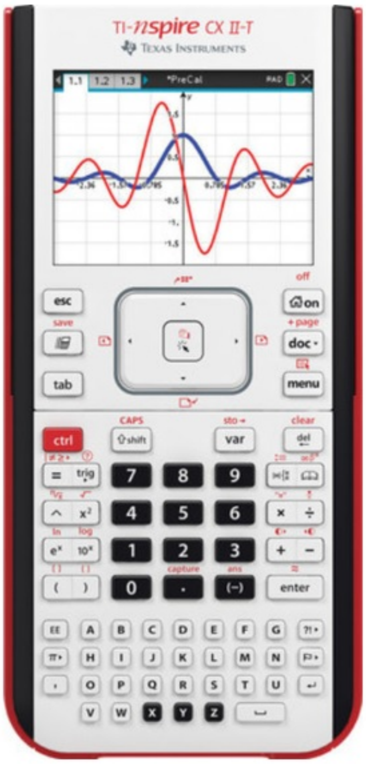
Kansverdelingen en de TI Nspire

Met de TI Nspire kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI Nspire en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.
Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

Inhoud



1 De binomiale kansverdeling

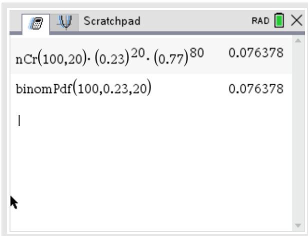
Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0,23^{k} \cdot 0,77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat er op de TI Nspire uitziet als nCr(100,k).

De kans $\mathrm{P}(X = 20)$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen:

- Kies eerst: MENU 5 3 (Combinaties). Zet tussen de haakjes: 100,20.
- Vervolg met $\cdot .0.23^{20} \cdot 0.77^{80}$ en ENTER.



Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

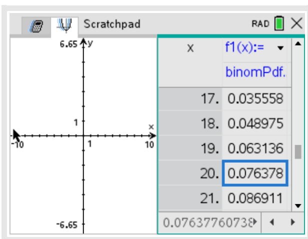
Dit kan echter gemakkelijker. De TI Nspire kent namelijk de functie "binompdf" (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Druk op MENU 5 (Kansen) 5 (Verdelingen) en D (Binomiale Pdf). Een venstertje verschijnt.
- Voer bij Aantal pogingen, n: 100 in, bij Kans op succes p: 0.23 en bij X-waarde: 20 en [OK].
- Je ziet nu binomPdf(100,0.23,20) en het antwoord 0.076378.
  (Je kunt ook gewoon in het rekenscherm binomPdf(100,0.23,20) typen en ENTER.)

Op deze manier kun je ook $\mathrm{P}(X \leq 20)$ berekenen door binomcdf(te kiezen.
Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.
Ga na:

- $\mathrm{P}(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810...$
  2ND VAR en kies B: binomcdf(en vul de juiste waarden voor trials, p en x value in en voer de berekening uit.
- $\mathrm{P}(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = \mathrm{P}(X \leq 19) = 0,2046...$
- $\mathrm{P}(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 19) = 0,7953...$
- $\mathrm{P}(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$
- $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = \mathrm{P}(X \leq 20) - \mathrm{P}(X \leq 9) = 0,2808...$
- $\mathrm{P}(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele x in het menu **FUNCTIES** als functie $f1(x) = \text{binomPdf}(100,0.23,x)$ in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken.
In de figuur hiernaast zie je hoe dat er uit ziet. Een grafiek is hierbij niet te maken.

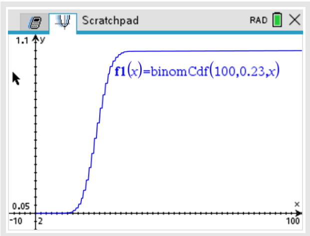


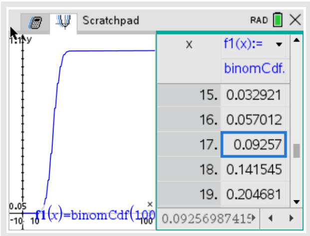
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.
Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele x met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als $f1(x) = \text{binomCdf}(100{,}0.23{,}x)$ in het menu **FUNCTIES** en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. Je ziet ook een bijpassende grafiek als je de goede vensterinstellingen kiest. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



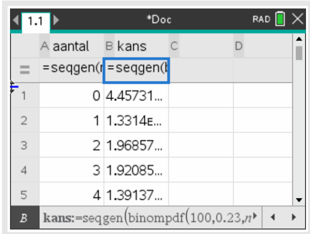


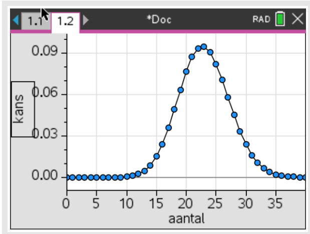
Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

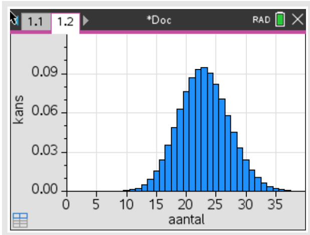
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) > 0{,}90$.
  Ga na, dat nu $g = 29$.

3 Kanshistogrammen

Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat kun je zo doen:







- Ga naar **LIJST & SPREADSHEET...** en maak eventueel eerst de eerste twee lijsten leeg.
- Geef kolom A een naam, bijvoorbeeld "aantal". In deze kolom komt de rij getallen van 0 t/m 100.
- Ga ergens in kolom A staan en druk op MENU, 3 (Gegevens) en 1 (Getallenrij genereren). Er opent een venster.
- Je wilt gewoon een rij getallen 0 t/m 100, dus de formule is: $u(n) = n$.
  Vul dat in. Zet "n0" op 0 en de "nMax" op 100. Laat "nStap" op 1 staan. Druk vervolgens op [OK].
- Geef kolom B ook een naam, bijvoorbeeld "kans". In deze kolom komt de bijbehorende binomiale kansen.
- Ga ergens in kolom B staan en druk op MENU, 3 (Gegevens) en 1 (Getallenrij genereren). Er opent een venster.
- Je wilt gewoon de kansen bij 0 t/m 100 hebben, dus de formule is: $u(n) = \text{binomPdf}(100{,}0.23{,}n)$.
  Vul dat in. "n0" blijft op 0 en "nMax" op 100. Ook "nStap" blijft op 1 staan. Druk vervolgens op [OK].
- Nu je de kolommen A en B hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met het menu **STATISTIEK**.
- Zet "aantal" op de x-as en "kans" op de y-as.
  Pas eventueel de vensterinstellingen aan.
  Doe dit via MENU, 5 (Venster/Zoom), 1 (Vensterinstellingen). Laat de x dan bijvoorbeeld van 0 t/m 40 lopen laat y automatisch bepalen.
- Je kunt ook een echt kanshistogram maken. In het practicum "Statistiek" zie je hoe dat gaat.

Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Als je een kansverdeling in de TI Nspire hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting** μ_X of $\overline{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking** σ_X.

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je weer naar tabblad 1.1 en ga je in één van beide eerste kolommen staan. Via MENU 1 (Statistieken) 1 (Statistiekberekeningen) 1 (Statistieken voor één variabele) kies je voor Aantal lijsten: 1 en [OK]. Je X1-lijst is "aantal" en de frequentie is "kans". Laat het resultaat in kolom C zetten. Druk [OK] en je krijgt alle waarden van de verdeling.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie in ongeveer 4,21.

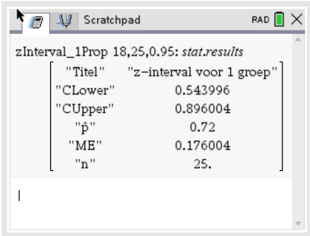
4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.
Het aantal successen in deze steekproef is 18

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.



- Ga naar het rekenscherm en toets MENU 6 (Statistieken) 6 (Betrouwbaarheidsintervallen) 5 (z-Interval met 1 prop...)
- Voer vervolgens in Successen, x: 18 en n: 25 en C-niveau: 0.95 (C van confidence) en [OK].
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [0,544; 0,896] en ook zie je de proportie $\widehat{p} = 0{,}72 = \frac{18}{25}$. Zie de figuur.

In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.

5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI Nspire.

- $\text{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$
  Toets in het rekenscherm MENU 5 (Kansen) 5 (Verdelingen).
  Kies 2 Normale Cdf en vul bij Ondergrens: 95 in, bij Bovengrens: 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].
- $\text{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}2023...$
  Toets MENU 5 (Kansen) 5 (Verdelingen).
  Kies 2 Normale Cdf en vul bij Ondergrens: -1000 in, bij Bovengrens: 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].
- $\text{P}\left(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 1 - \text{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}7976...$
  Toets MENU 5 (Kansen) 5 (Verdelingen).
  Kies 2 Normale Cdf en vul bij Ondergrens: 95 in, bij Bovengrens: 1000 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].

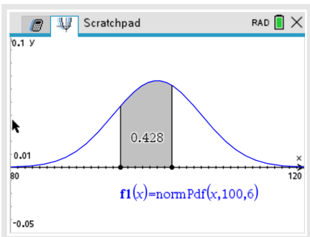
Loop al deze berekeningen zelf na!

Bij een normale kansverdeling kun je op de TI Nspire de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu DISTR.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$\text{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$

Je gaat naar het menu **FUNCTIES** en je zorgt ervoor dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens:



- Vul $f1(x) = \text{normPdf}(x{,}100{,}6)$ in als functie.
  Je kunt normPdf(vinden via bij "Kans", "Verdelingen", Normale Pdf (of door het in te typen).
- Stel het venster zo in dat x loopt van 80 t/m 120 en y (de kansen) loopt van -0,05 t/m 0,1.
- Bepaal nu de oppervlakte onder de grafiek van $x = 95$ tot $x = 102$.
  In het practicum "Functies" heb je gezien hoe je oppervlaktes onder de grafiek bepaalt.
- De figuur hiernaast komt dan in beeld.

6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de TI Nspire. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- $\text{P}\left(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  Toets in het rekenscherm MENU, 5 (Kansen), 5 (Verdelingen) en 3 (Inverse-normaal).
  Vul in: Oppervlakte: 0.20, μ: 100 en σ: 6 en [OK];
  Je vindt $g = 94{,}9503$ dus $g \approx 95$.
- $\text{P}\left(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$ geeft $\text{P}\left(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}80$
  Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!

7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

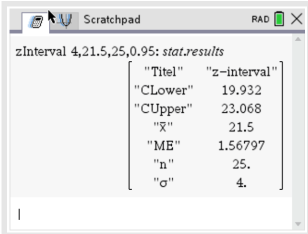
(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.
Het gemiddelde van deze steekproef $\overline{X} = 21{,}5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is en dus de z-verdeling gebruiken.



- Ga naar het rekenscherm en toets MENU 6 (Statistieken) 6 (Betrouwbaarheidsintervallen) 1 (z-Interval).
- Kies bij Invoermethode: Stats en [OK].
- Vul in σ: 4, X-staaf: 21.5, n: 25 en C-level: 0.95 en [OK].
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [19,932; 23,068]. Zie de figuur.

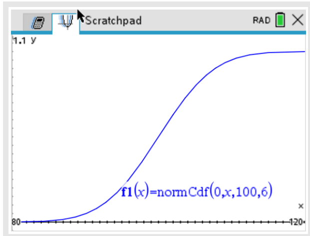
Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.

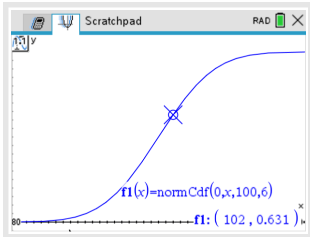
8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normal-cdf. Je kunt in het Y= scherm de cumulatieve normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right)$





Je voorziet in het menu **FUNCTIES** eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 80 en 120 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaal-kromme) tussen - 0,1 en 1,1. Zorg dat er geen andere functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld.

- Voer $f1(x)$ = normCdf(0,x,100,6) in en ENTER.
- Ga nu naar MENU, 5 (Spoor) en 1 (Grafiekspoor) om met de cursor over de grafiek te lopen en kansen te bepalen. Dit is echter nogal grof. Typ daarom gewoon 102 in om de kans bij $x = 102$ te bepalen. Zie de tweede figuur.

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$\text{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$

Je voert dan bij $f1(x)$ = de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en bij $f2(x)$ = de gegeven kans 0,2. Met behulp MENU 6 (Grafiek analyseren) en 4 (Snijpunt) vin je $g = 94{,}95027...$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij $f1(x)$ = normCdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = 100$ en $\sigma = x$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7{,}8943...$.

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7{,}9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:
$P\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij $f1(x) =$ normCdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = x$ en $\sigma = 6$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100{,}4799....$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100{,}5$.