Kansverdelingen en de TI-84

Met de TI-84 kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI-84 en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.
Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

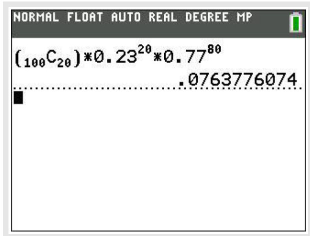
Inhoud

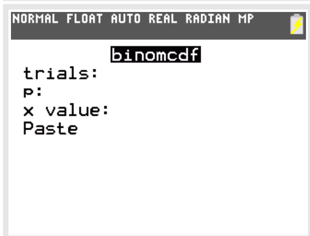
1 De binomiale kansverdeling

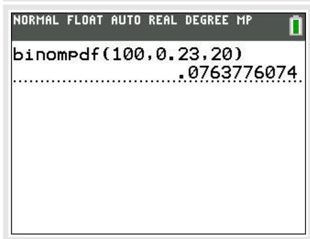
Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0{,}23 = 0{,}77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0{,}23^{k} \cdot 0{,}77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat er op de TI-84 uitziet als 100 nCr k of $_{100}C_k$.







De kans $\mathrm{P}(X = 20)$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen:

- Voer in 100 en $\boxed{\text{MATH}}$ ga naar de tab PROB en kies 3: nCr (als je de pijltjestoetsen gebruikt moet je ook nog $\boxed{\text{ENTER}}$ toetsen).
- Vervolg met 20 $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\times}$ .23 $\boxed{\wedge}$ 20 $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\times}$ .77 $\boxed{\wedge}$ 80 en $\boxed{\text{ENTER}}$.

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

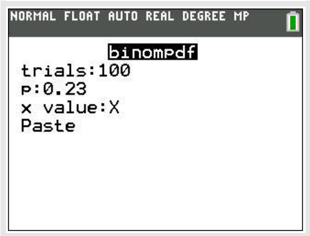
Dit kan echter gemakkelijker. De TI-84 kent namelijk de functie "binompdf" (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

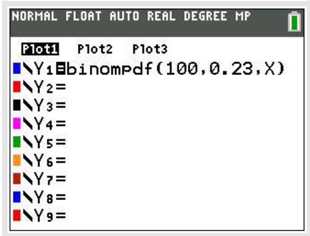
- Toets $\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{VARS}}$, je hebt dan het DISTR-menu (distribution = verdeling).
- Kies A: binompdf en $\boxed{\text{ENTER}}$ (als je niet de pijltjestoetsen gebruikt maar alleen A toetst is $\boxed{\text{ENTER}}$ overbodig).
- Je ziet dan een venster waarin je waarden kunt invoeren. Als dit niet het geval is, druk dan op $\boxed{\text{MODE}}$ en zet STAT WIZARDS op ON.
- Voer bij trials 100 in, bij p 0.23 en bij x value 20.
- Ga vervolgens naar Paste en druk op $\boxed{\text{ENTER}}$. De functie verschijnt nu in je rekenscherm.
- Druk nog eens op $\boxed{\text{ENTER}}$ om de berekening uit te voeren.

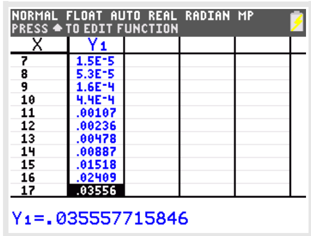
Op deze manier kun je ook $\mathrm{P}(X \leq 20)$ berekenen door binomcdf(te kiezen.
Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.
Ga na:

- $\mathrm{P}(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2810...$
  $\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{VARS}}$ en kies B: binomcdf(en vul de juiste waarden voor trials, p en x value in en voer de berekening uit.
- $\mathrm{P}(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}2046...$
- $\mathrm{P}(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}7953...$
- $\mathrm{P}(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}7189...$
- $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 20) - \mathrm{P}(X \leq 9) = 0{,}2808...$
- $\mathrm{P}(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in het Y= scherm als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:





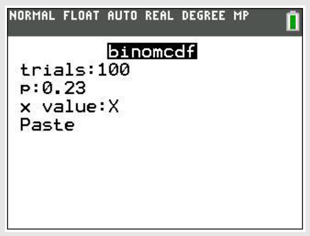


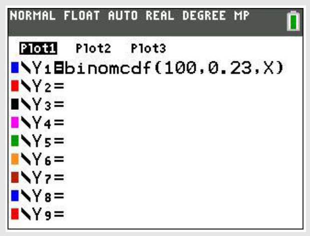
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

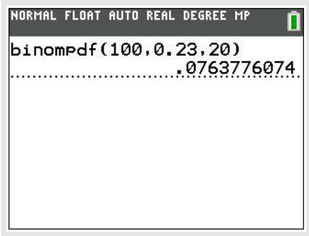
Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.
Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in het Y= scherm en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.





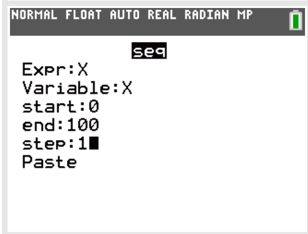


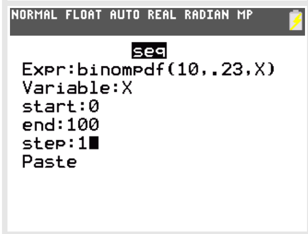
Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

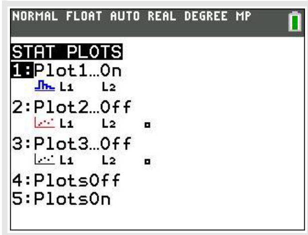
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) > 0{,}90$.
  Ga na, dat nu $g = 29$.

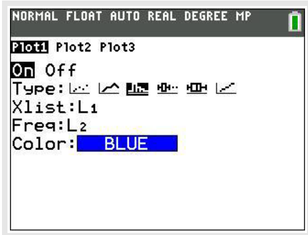
3 Kanshistogrammen

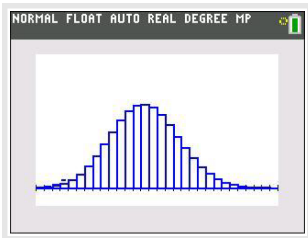
Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat kun je zo doen:











- Toets STAT en kies 1: Edit... Je ziet nu een aantal lijsten L1, L2, enzovoorts.
  (Maak eventueel eerst de eerste twee lijsten leeg via STAT 4: ClrList L1, L2.)
- Voer in L1 de waarden voor de stochast $X = 0{,}1{,}2{,}\ldots{,}100$ in door de cursor op L1 te zetten en ENTER te toetsen. Onderaan zie je nu L1= met daarachter de cursor.
- Ga naar 2ND STAT en naar de tab OPS en kies 5: seq.
  Een nieuw venster opent. Zet achter Expr en Variable beide een X.
  Zet bij start 0, bij end 100 en bij step 1.
  Ga nu naar Paste en druk twee keer op ENTER.
  In L1 staan nu de getallen 0 t/m 100. Ga dat na door met de pijltjes toetsen door de lijst te lopen.
- Voer in L2 de kansen in door de cursor op L2 te zetten en ENTER te toetsen.
  Onderaan zie je nu L2= met daarachter de cursor.
  Ga naar 2ND STAT en naar de tab OPS en kies 5: seq. Een nieuw venster opent.
  Ga achter Expr staan en 2ND VARS en kies A: binompdf.
  Je ziet nu binompdf(achter Expr verschijnen. Vul in: 100, 0.23 en X en Paste ENTER.
  Zet achter Variable X, bij start 0, bij end 100 en bij step 1.
  Ga vervolgens naar Paste en druk twee keer op ENTER.
  Nu staan in L2 de bijbehorende kansen. Controleer dat.
- Nu je de lijsten L1 en L2 hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met behulp van STAT PLOT. Je bereikt dat met: 2ND Y=. Kies je voor 1: Plot1, dan kun je het eerste diagram instellen, je ziet de figuren hiernaast.
- Kies voor On ENTER en loop met de pijltjestoetsen naar en door Type. Kies het type plaatje, controleer of Xlist op L1 en Freq op L2 staat ingesteld. Indien dat niet het geval is, zorg daar dan voor (Je vindt L1, L2, enzovoorts op de cijfertoetsen via 2ND). Door GRAPH te toetsen zou het gekozen diagram in beeld moeten komen, afhankelijk van de scherminstellingen. Omdat er alleen voor x van 10 t/m 40 kansen uitkomen die in beeld zijn te brengen, stel je voor x ook die waarden in. De uitkomsten liggen dan tussen 0 en 0,15.

Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Als je een kansverdeling als lijst in de TI-84 hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met μ_X of $\overline{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking**, aangegeven met σ_X.

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, toets je STAT, ga ja naar de tab CALC en dan 1: 1-Var Stats. Kies voor List de lijst met je waarnemingsgetallen (L1) en voor FreqList de lijst met kansen (L2) en Calculate ENTER.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie in ongeveer 4,21.

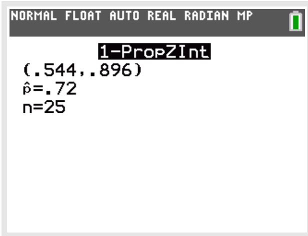
4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.
Het aantal successen in deze steekproef is 18

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.



- Toets STAT en ga naar de tab TESTS en kies A: 1-PropZInt;
- voer vervolgens in x: 18 en n: 25 en C-Level: 0.95 (C van confidence) en Calculate ENTER;
- je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [0,544; 0,896] en ook zie je de proportie $0{,}72 = \frac{18}{25}$. Zie de figuur.

In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.

5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI-84.

- $\mathrm{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$
  Toets 2ND VARS om bij DISTR (distributions = verdelingen) te komen.
  Kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) 95 in, bij upper(bovengrens) 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.
- $\mathrm{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}2023...$
  Toets 2ND VARS en kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) -1000 in, bij upper(bovengrens) 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.
- $\mathrm{P}\left(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}7976...$
  Toets 2ND VARS en kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) 95 in, bij upper(bovengrens) 1000 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.

Loop al deze berekeningen zelf na!

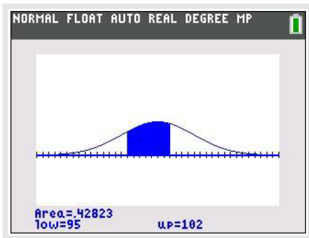
Bij een normale kansverdeling kun je op de TI-84 de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu DISTR.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$\mathrm{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld x laat je tussen 80 en 120 lopen en y (dat zijn de waarden bij de normaalkromme) tussen - 0,1 en 0,2. Zorg dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- 2ND VARS en naar de tab DRAW en je kiest 1: ShadeNorm(ENTER.
- Een nieuw venster opent. Vul de gegevens hetzelfde als hierboven in, ga naar Draw en druk weer op ENTER.
- De figuur hiernaast komt dan in beeld.



Met 2ND PRGM 1: ClrDraw gaat een figuur weer weg.

6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de TI-84. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- $\text{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  Toets 2ND VARS en kies 3: invNorm(.
  Voer vervolgens in 0.20, 100 en 6 (in die volgorde) en Paste ENTER;
  Je vindt $g = 94{,}95027...$ dus $g \approx 95$.
- $\text{P}\left(X > g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$ geeft $\text{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}80$
  Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!

7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

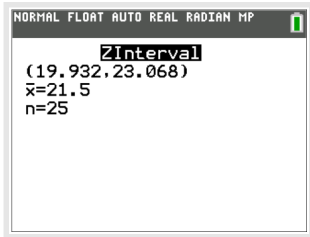
Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.
Het gemiddelde van deze steekproef $\overline{X} = 21{,}5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is en dus de z-verdeling gebruiken.

- Toets STATS en ga naar TESTS en kies 7: ZInterval.
- Kies bij Inpt voor STATS en ENTER.
- Vul in σ: 4, x̄: 21.5, n: 25 en C-level: 0.95 en Calculate ENTER.



In de figuur zie je het resultaat.

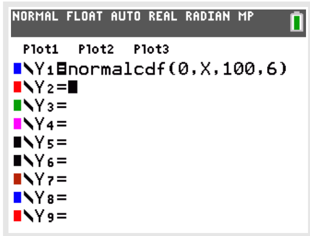
Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.

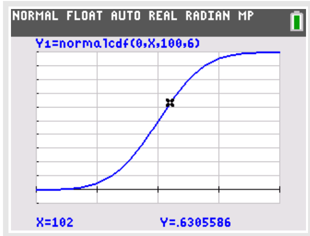
8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in het Y= scherm de cumulatieve normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$\mathrm{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right)$





Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 80 en 120 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen - 0,1 en 1. Zorg dat er geen andere functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- Y= om het invoerscherm te openen;
- 2ND VARS en je kiest 2: normalcdf(;
- In het verschenen venster vul je bij de ondergrens 0 in en bij de bovengrens X. Vul ook μ en σ zoals ze hierboven staan in.
- Ga naar Paste en druk tweemaal op ENTER.
- Plot vervolgens de grafiek door op PLOT te drukken.

Toets je nu TRACE dan kun je met de cursor over de grafiek lopen en kansen bepalen. Dat is echter nogal grof. Via het CALC-menu en Value kun je de gevraagde kans bepalen: 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$\mathrm{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$

Je voert dan voor y_1 de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor y_2 de gegeven kans 0,2. Met behulp van CALC 5: intersect vind je dat $g = 94{,}95027...$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$\mathrm{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij y_1 normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = 100$ en $\sigma = x$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7{,}8943....$

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7{,}9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij y_1 normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = x$ en $\sigma = 6$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0tot 1 (cumulatieve kansen).
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100{,}4799....$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100{,}5$.