Kansverdelingen en de HP Prime

Met de HP Prime kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de HP Prime en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.
Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en tellen** door.

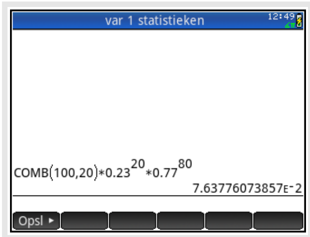
Inhoud

1 De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1-0{,}23 = 0{,}77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{100}{k} \cdot 0{,}23^{k} \cdot 0{,}77^{100-k}$$

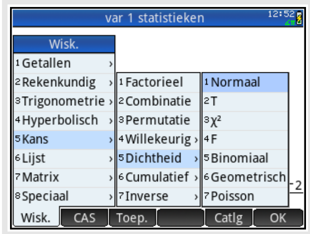
hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat je op de HP Prime vind in de “gereedschapskist”.



De kans $\mathrm{P}(X=20)$ is dan gewoon in het basisscherm te bepalen:

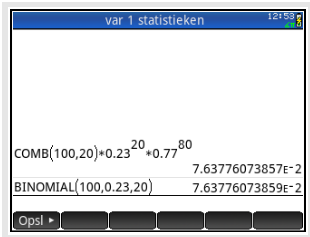
- kies en ga naar COMB;
- maak dan COMB(100,20) * 0.23^{20} * 0.77^{80} en Enter.

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.



Dit kan echter gemakkelijker. De HP Prime kent namelijk de binomiale kansverdeling waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

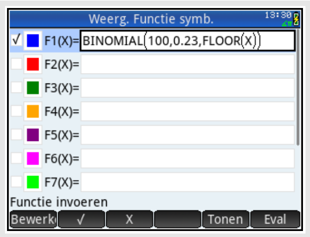
- kies en ga naar 5: Kans en kies 5: Dichtheid en 5: Binomiaal;
- voer vervolgens in 100, 0.23 en 20 (in die volgorde) en Enter;
- je krijgt meteen de gevraagde kans 0,07637...

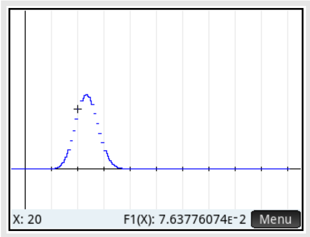


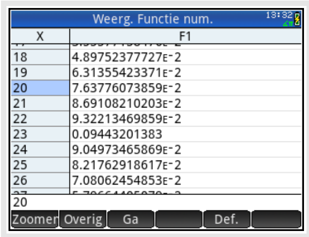
Op deze manier kun je ook $\mathrm{P}(X \leq 20)$ berekenen door bij 5: Kans voor 6: Cumulatief en 5: Binomiaal te kiezen. Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.
Ga na:

- $\mathrm{P}(X \leq 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = 0{,}2810...$
  Kies en ga naar 5: Kans, kies 6: Cumulatief en 5: Binomiaal en voer 100, 0.23, 20 in en Enter.
- $\mathrm{P}(X < 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}2046...$
- $\mathrm{P}(X \geq 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = 1-\mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}7953...$
- $\mathrm{P}(X > 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = 0{,}7189...$
- $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 20) - \mathrm{P}(X \leq 9) = 0{,}2808...$
- $\mathrm{P}(10 < X < 20 | n=100 \text{ en } p=0{,}23) = 0{,}2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in de app **FUNCTIE** als functie F1(X) in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken.
Start de functie app en voer F1(X) in, het commando FLOOR (is gehele deel van een getal) vindt je via de gereedschapskist, optie 1: Getallen, optie 2: Vloer. Hiermee zorg je dat de kans wordt berekend voor stappen van 1 eenheid langs de *x*-as. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:





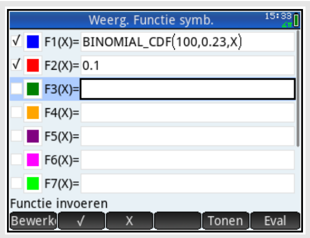


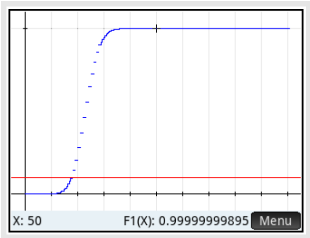
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

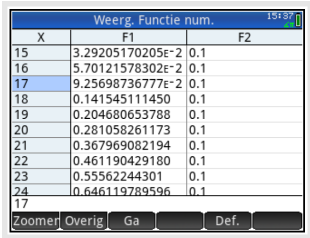
Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.
Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}\,(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0{,}23$.
Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in F1(X) in de app **FUNCTIE** en dan de tabel van die functie in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.







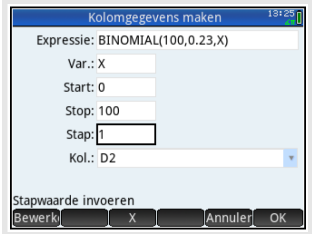
Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

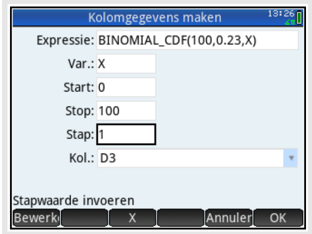
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}\,(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}\,(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}\,(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}\,(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) > 0{,}90$.
  Ga na, dat nu $g = 29$.

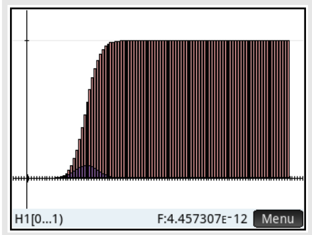
3 Kanshistogrammen

Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat kun je zo doen:

- Open de app **VAR 1 STATISTIEKEN** en maak eerst alle lijsten leeg via Shift Esc/Clear en kies 3: Alles.
- Voer in D1 de waarden voor de stochast $X = 0{,}1{,}2{,}\ldots{,}100$ in door MAAK te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de bovenste figuur laat zien en OK.
- Voer in D2 de bijbehorende kansen in door MAAK te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de tweede figuur en OK. Denk er om dat je de binomiale verdeling invoert via Mem en ga naar 5: Kans en kies 5: Dichtheid en 5: Binomiaal; en dan 100, 0.23 en X invullen en OK.
- Voer in D3 de bijbehorende cumulatieve kansen in door MAAK te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de derde figuur en OK. Denk er om dat je de binomiale verdeling invoert via Mem en ga naar 5: Kans en kies 6: Cumulatief en 5: Binomiaal; en dan 100, 0.23 en X invullen en OK.
- Nu je de lijsten hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken. Met behulp van Symb/Setup kun je die diagrammen instellen zoals in de vierde figuur.
- Met behulp van Plot/Setup krijg je de vijfde figuur.







Oefen jezelf door zo een paar (cumulatieve) kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken.

Centrum en spreiding

Als je een kansverdeling als lijst in de HP Prime hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met $\overline{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking**, aangegeven met σ_X.

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, toets je Num/Setup en ga je naar STATS.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie in ongeveer 4,21.

4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.
Het aantal successen in deze steekproef is 18.

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.

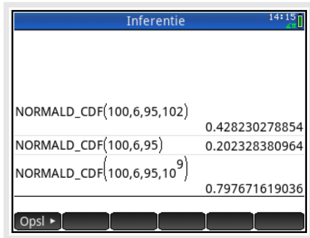
- Kies de app **INFERENTIE** en kies Methode: Betrouwbaarh.interval en Type: Z-Int: 1 π.
- Ga naar Num Setup en voer in X: 18, n: 25 en C: 0.95 (C van "confidence interval") en BEREKEN.
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval (zie figuur)
  Laagste 0,543995670706
  Hoogste 0,896004329294.

In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.

5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de HP Prime.

Open met Settings het basisscherm.



- $P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}4282...$
  Kies Mem B en ga 5: Kans, 6: Cumulatief en 1: Normaal;
  voer vervolgens in 100, 6, 95 en 102 (in die volgorde) en Enter.
- $P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}2023...$
  Kies Mem B en ga 5: Kans, 6: Cumulatief en 1: Normaal;
  voer vervolgens in 100, 6 en 95 (in die volgorde) en Enter.
- $P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 1 - P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}7976...$
  Doe dit net als de eerste versie, neem 95 als ondergrens en een heel groot getal als bovengrens.

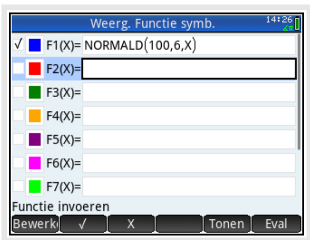
Loop deze berekeningen zelf na

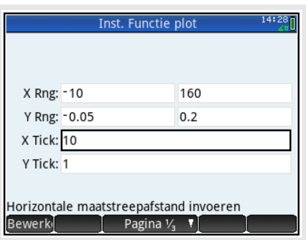
Bij een normale kansverdeling kun je op de HP Prime de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het de app **FUNCTIE**.

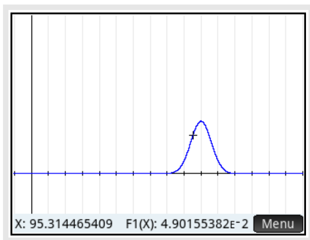
Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0{,}4282...$

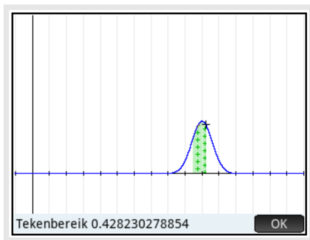
Open de Functie applicatie en maak deze eventueel schoon met Shift Esc Clear. Vul bij F1(X) de functie in, gebruik Shift Plot Setup voor het instellen van je scherm.





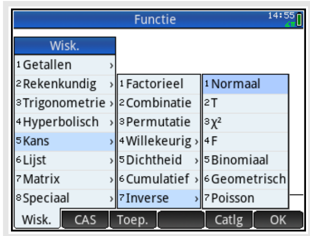


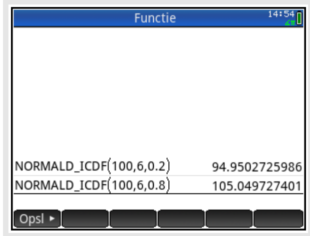
Kies daarna onderin de beeldrand MENU en via FCN de optie 6: Oppervlak vul dan de ondergrens 95 en de bovengrens 102 in (denk weer om steeds tussentijds OK te drukken).



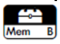
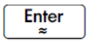
6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de HP Prime. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:





Open met  het basisscherm.

- $\mathrm{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  Kies  en ga 5: Kans, 7: Inverse en 1: Normaal;
  voer vervolgens in 100, 6 en 0.20 (in die volgorde) en .
  je vindt $g = 94{,}95027...$ dus $g \approx 95$.
- $\mathrm{P}\left(X > g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  geeft $\mathrm{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}80$
  Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop al deze berekeningen zelf na!

7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.
Het gemiddelde van deze steekproef $\overline{X} = 21{,}5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dit gemiddelde normaal verdeeld is. Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

- Kies de app **INFERENTIE** en kies Methode: Betrouwbaarh.interval en Type: Z-Int: 1 μ.
- Ga naar Num Setup en voer in $\overline{x}$: 21.5, n: 25 σ: 4 en C: 0.95 (C van "confidence interval") en BEREKEN.
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval (zie figuur)
  Laagste 1,9320288124
  Hoogste 23,0679711876.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.

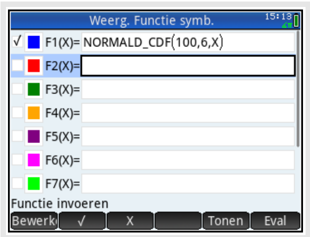
8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

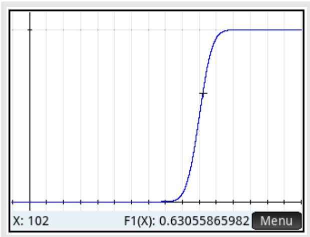
Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling kun je ook goed met de app **FUNCTIE** werken en daarin de cumulatieve normale verdeling invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right)$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 0 en 100 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen -0,1 en 1,1. Zorg dat er geen functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:





In de grafiek kies je MENU en GA en spring je naar $x = 102$, je kunt dan de bijbehorende y-waarde (de gevraagde kans) aflezen 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$\text{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$

Je voert dan voor F1(X) de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor F2(X) de gegeven kans 0,2. Met behulp van "Snijpunt" vind je dat $g = 94{,}95027...$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij F1(X) de cumulatieve normale verdeling in met $\mu = 100$ en $\sigma = x$ en als onder- en bovengrens 0 en 102.
- Voer bij F2(X) de waarde 0,20 in.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7{,}8943...$.

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7{,}9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$\mathrm{P}\left(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij F1(X) de cumulatieve normale verdeling in met $\mu = x$ en $\sigma = 6$ en als onder- en bovengrens 0 en 102.
- Voer bij F2(X) de waarde 0,6 in.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100{,}4799...$.

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100{,}5$.