

Kansverdelingen met de HP PRIME

Met de HP PRIME kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de HP PRIME en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

Loop eerst het practicum: 'Simulaties en telsystemen met de HP PRIME' door.

Inhoud

- [De binomiale kansverdeling](#)
 - [Grenswaarden bij binomiale toetsing](#)
 - [Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie](#)
 - [Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen](#)
 - [De normale kansverdeling](#)
 - [Grenswaarden bij normale kansverdelingen](#)
 - [Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen](#)
 - [Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen](#)
-

De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(x = k) = \binom{100}{k} * (0,23)^k * (0,77)^{100-k}$$

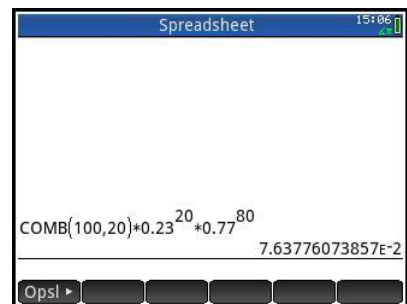
hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$ wat er op je HP PRIME uit ziet als COMB(100, k).

De kans op $X = 20$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen door te tikken:

COMB(100,23)*0,23²⁰ * 0,77⁸⁰

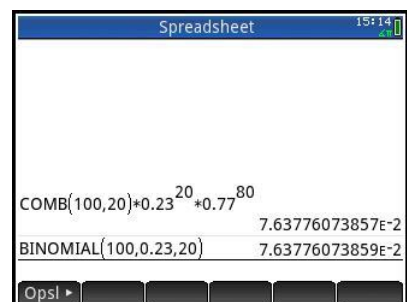
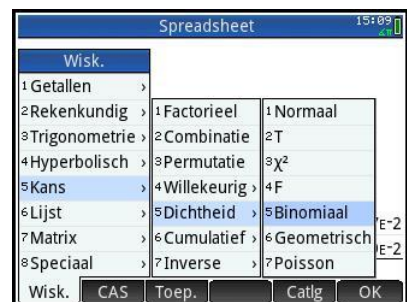
COMB() kan je intypen of ophalen via de gereedschapskist  , optie 5 kans, optie 2 combinatie.

Zie het venster hiernaast.

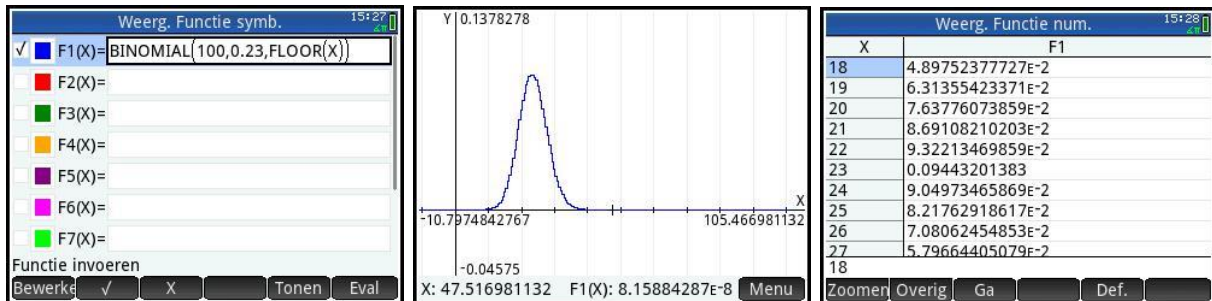


Dit kan echter gemakkelijker. De HP PRIME kent namelijk de functie 'binompdf' (binomial probability distribution function= binomiale kans verdeling functie) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Open de gereedschapskist  , optie 5 kans, optie 5 Dichtheid, optie 5 Binomiaal.
- Vul dan aan met de bijbehorende getallen en bevestig met  voor de berekening.
- In het scherm hiernaast zie je dat je dezelfde uitkomst krijgt.



De complete kansverdeling is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in de Functie app als functie F1(X) in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. Start de functie app en voer F1(X) in, het commando FLOOR (=gehele deel van een getal) vindt je via de gereedschapskist, optie 1 Getallen, optie 2 Vloer. Hiermee zorg je dat de kans wordt berekend voor stappen van 1 eenheid langs de x-as. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:



De hierboven gevonden waarde voor $x = 20$ vind je in de tabel terug.

Als een variabele X binomiaal is verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,23$ dan kun je de volgende binomiale kansen berekenen met de HP PRIME:

- **$P(X = 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,0764...$**
Gebruik de gereedschapskist, je kan ook de catalogus gebruiken, wandel naar Binomial en vul aan tot BINOMIAL(100,0.23,20) en bevestig met Enter
- **$P(X \leq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810...$**
Gebruik nu BINOMIAL_CDF (CDF=Cumulatieve Distributie Functie)
- **$P(X < 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2046...$**
Ook de BINOMIAL_CDF, maar de 20 vervangen door 19
- **$P(X > 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$**
Toets 1 MODE APPS LN (-) CLEAR 1 0 0 , 0 . 2 3 , 2 0) ON f
gebruik BINOMIAL_CDF
 - Vul de *trials*(n), *p* en *x value*(X) in en voer de berekening uit.
- **$P(X \geq 20 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19 \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7953...$**
 - Toets 1 2nd VARS en kies B: binomcdf(.
 - Vul de *trials*(n), *p* en *x value*(X = 19) in en voer de berekening uit.

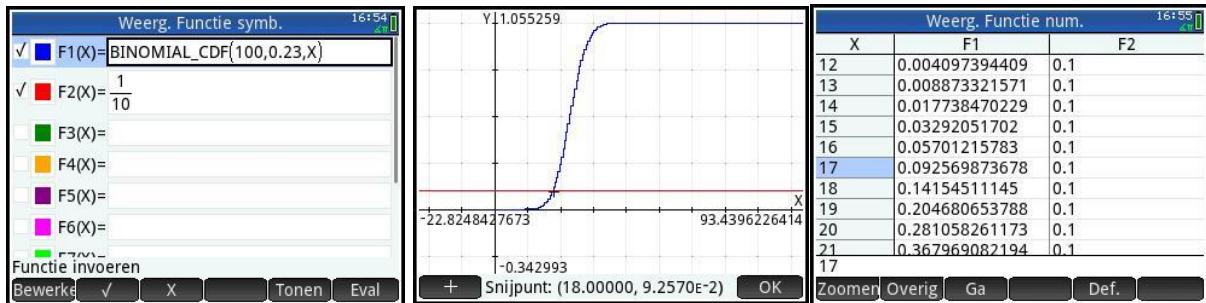


Grenswaarden bij binomiale toetsing

Vooral bij het **toetsen van hypothesen** wil je grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen. Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \leq g \mid n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in F1(X) in de Functie applicatie en dan de tabel van die functie in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie

Bij een binomiale kansverdeling kun je een **kanshistogram** maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

Open de Var 2 statistieken applicatie en maak deze eventueel leeg met **Shift** en **Esc**.

Voor het maken van een reeks getallen in lijst C1 kies je dan onder in de beeldrand de knop **Maak**. In het scherm dat nbu opent kan je de gegevens voor het maken van de lijst invoeren, we beginnen met een lijst met de getallen 1 tot en met 100.

in lijst C3 de cumulative Binomiale verdeling

Zie de schermen hiernaast voor de invoer, let er op dat je de juiste startwaarde, stapgrootte en doellijst kiest.

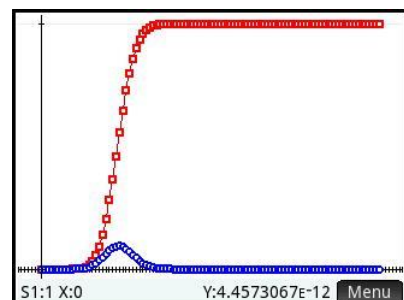
Je gebruikt natuurlijk steeds **OK** voor het uitvoeren van het commando.

De tabel wordt:

Weerg. var 2 statistieken num.				
	C1	C2	C3	C4
1		0.4573E-12	4.4573E-12	
2		1.13314E-10	1.38E-10	
3		2.196857E-9	2.106E-9	
4		3.1.92085E-8	2.1315E-8	
5		4.1.39137E-7	1.60452E-7	
6		5.7.97960E-7	9.58412E-7	
7		6.3.77390E-6	4.73231E-6	
8		7.1.51376E-5	1.98699E-5	
9		8.5.25639E-5	7.24338E-5	
10		9.1.60498E-4	3.2932E-4	
4.45730669014E-12				
Bewerke Overig Ga Sort. Maak Stats				

Open het symbolische scherm **Symb** en stel in zoals hiernaast:

De grafiek (via **View Copy** en automatisch schalen):



Betrouwbaarheidsinterval bij binomiale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast X is binomiaal verdeeld.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef, $X = 18$.

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie?

Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Antwoord:

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

Apps
Info -> Inference

Method: Kies Confidence Interval

Type: Kies Z-Int: 1 π

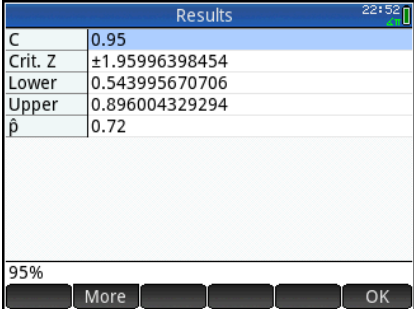
Num
↳ Setup

Vul in: X , n en de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1).

Calc

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie ligt dus tussen 0.441 en 0,859.



Results	
C	0.95
Crit. Z	±1.95996398454
Lower	0.543995670706
Upper	0.896004329294
$\hat{p}$	0.72
95%	
More OK	



Centrum en spreiding van een kanshistogram

Als je een kansverdeling als lijst in de HP PRIME hebt ingevoerd (zie de voorgaande tekst), dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- De gebruikte centrummaat voor de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met μ_X of $\bar{X}$.
- De gebruikte spreidingsmaat heet de standaardafwijking of **standaarddeviatie**, aangegeven met σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

Open de Var 1 stat app, gebruik de knop **Maak** en maak de beide rijen C1 en C2 net zoals hierboven in de Var 2Stat app.

Gebruik daarna de **Stats** knop voor een lijst met de statistische kentallen.

In het plaatje zie je het eindresultaat. De verwachting is dus 23 en de standaarddeviatie is ongeveer 4,21.

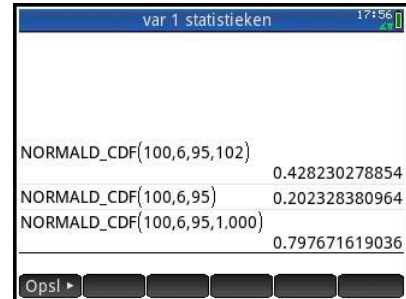
Weerg. var 1 statistieken num. 17:45	
H1	
n	1
Min	0
Q1	20
Med	23
Q3	26
Max	100
ΣX	23
ΣX^2	546.71
$\bar{x}$	23
sX	10.520.812.7063
Aantal items	
Overig	
OK	



De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de HP PRIME:

- $P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,4282...$
 - Open de catalogus via  en . Wandel naar NORMALD_CDF en vul in:
- $P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023...$
 - Vul alleen een bovengrens in: 95 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven.
- $P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,7976...$
 - Vul de ondergrens 95 in en een bovengrens van bijvoorbeeld 1000 (als het maar flink wat groter is) en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven.



NORMALD_CDF(100,6,95,102)	0.428230278854
NORMALD_CDF(100,6,95)	0.202328380964
NORMALD_CDF(100,6,95,1,000)	0.797671619036

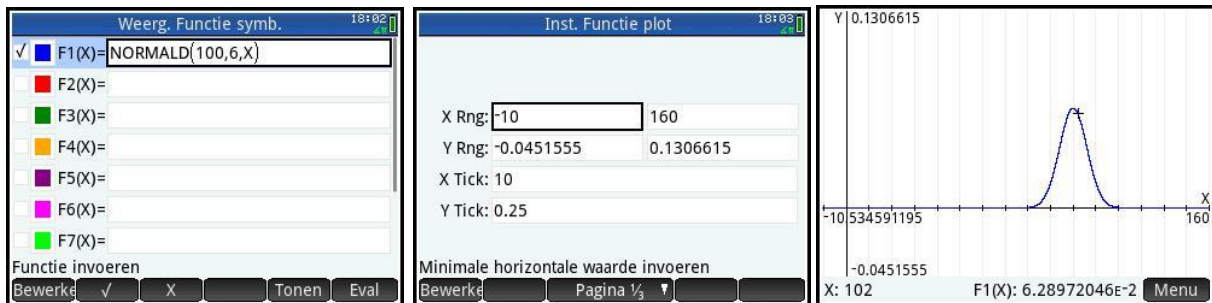
Loop al deze berekeningen zelf na!

Bij een normale kansverdeling kun je op de HP PRIME de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je de Functie applicatie.

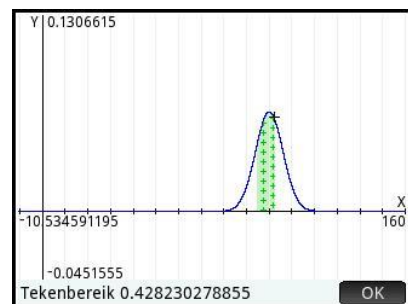
Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,4282...$$

Open de Functie applicatie en maak deze eventueel schoon met  en . Vul bij F1(X) de functie in, gebruik  en  voor het instellen van je scherm.



Kies dan onderin de beeldrand , de optie Tekenbereik vul dan de ondergrens 95 en de bovengrens 102 in.



Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma = 4$.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval?

Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Antwoord:

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is.

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:



-> Inference

Method: Kies Confidence Interval

Type: Kies Z-Int: 1 μ



Vul $\bar{X}$, n , σ en de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1) in.

Calc

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1



Results		22:12
C	0.95	
Crit. Z	± 1.95996398454	
Lower	19.9320288124	
Upper	23.0679711876	
19.9320288124		
More		OK

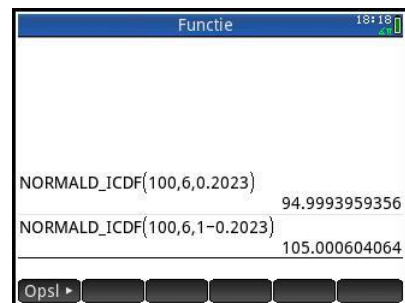
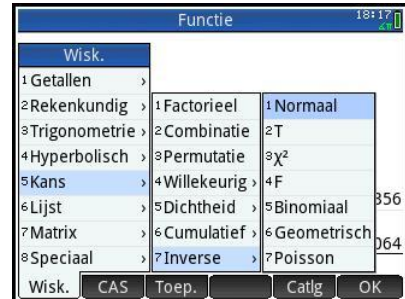
Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de HP PRIME. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- **$P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023$ geeft: $g \approx 95$**

Gebruik de gereedschapskist  en kies de opties Wisk., Kans, Inverse en Normaal (zie het scherm) vervolgens invullen zoals in het tweede scherm.

- **$P(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023$ geeft: $g \approx 105$**
Omdat $P(X > g) = 1 - P(X < g)$, is nu: $P(X < g) = 1 - 0,2023 = 0,7977$.



Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!



Betrouwbaarheidsinterval bij normale kansverdelingen

(Dit wordt bijna alleen gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval.

Je kunt dit bij normale verdelingen snel bepalen met een speciale functie: z-interval.

Het gaat zo:

Opdracht:

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma = 4$.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Wat is het 95% betrouwbaarheidsinterval?

Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Antwoord:

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is.

Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:



-> Inference

Method: Kies Confidence Interval

Type: Kies Z-Int: 1 μ



Vul $\bar{X}$, n , σ en de betrouwbaarheid (als getal tussen 0 en 1) in.

Calc

Dit geeft het resultaat als in de afbeelding.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1



Results	
C	0.95
Crit. Z	± 1.95996398454
Lower	19.9320288124
Upper	23.0679711876
19.9320288124	
More	OK

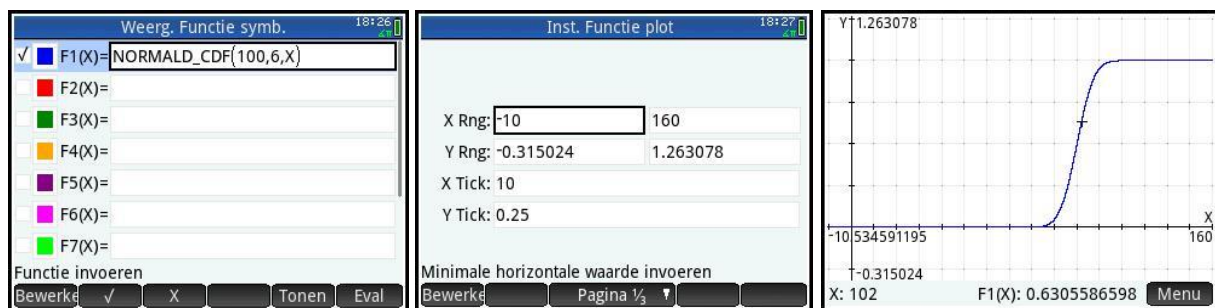
Gemiddelde of standaarddeviatie bij normale kansverdeling berekenen

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in de Functie applicatie de *cumulatieve* normale verdeling NORMALD_CDF invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,2023...$$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je X lopen tussen 80 en 120 en laat je Y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen $-0,1$ en 1 . Zorg dat er geen functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:



In de grafiek kies je **Menu** en **Ga** en spring je naar $X=102$, je kan dan de bijbehorende Y waarde (= de gevraagde kans) aflezen 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans.
Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

Je voert dan voor $F1(X)$ de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor Y_2 de gegeven kans 0,6. Met behulp van snijpunt vind je dat $g = 101,52...$

Verder kun je de **standaardafwijking bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij $F1(X)$ een normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102. Laat het gemiddelde μ weer 100 zijn. Vul X in voor de standaarddeviatie(σ) .
- Stel het venster zo in dat X (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Via het bepalen van het snijpunt vind je nu als standaarddeviatie 7,8943...

Tenslotte kun je het **gemiddelde bepalen** als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) \approx 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij Y_1 een normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102. Vul 6 in voor de standaarddeviatie. Vul X in voor het gemiddelde (μ).
- Voer ook $Y_2 = 0.6$ in.
- Stel het venster zo in dat X (dat is nu het gemiddelde!) loopt van 80 tot 120 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen)
- Met intersect vind je nu als gemiddelde 100,4799...

