

Wiskunde A 456 VWO

EXAMENTRAINING





© 2025

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Examentraining

1	Standaardfuncties	3
2	Vergelijkingen en ongelijkheden	13
3	Formules opstellen	25
4	Differentiaalrekening	35
5	Discrete wiskunde	45
6	Naar het examen	55

Antwoorden	65
------------	----

Register	86
----------	----

1 Standaardfuncties

Inleiding



Figuur 1

In de Rotterdamse haven bevinden zich grote chemische bedrijven. Bij deze bedrijven wordt gebruikgemaakt van gevaarlijke chemische stoffen, zoals chlooraceton en hexaan. Deze stoffen worden gebruikt om producten zoals verf, medicijnen en schoonmaakmiddelen te maken. Om de veiligheid te waarborgen, moeten deze stoffen zorgvuldig worden opgeslagen. Daarom wordt er gebruikgemaakt van tanks in de vorm van bollen. Door de bolvorm is de tank veiliger, omdat drukkrachten in een bol beter kunnen worden opgevangen dan in andere vormen. In de Rotterdamse haven kun je er dus van uitgaan dat hoe ronder de opslagtank is, hoe hoger de druk van de opgeslagen stof zal zijn.

Verkennen

Opgave V1

Een bedrijf wil een opslagtank maken voor gevaarlijke stoffen. Er moet $1,3 \text{ Mm}^3$ gas kunnen worden opgeslagen in honderd bolvormige opslagtanks. Voor de inhoud van een bol geldt: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Hierin is r de straal en I de inhoud van de bol voorstelt.

Bereken de straal van zo'n gastank als ze allemaal even groot zijn. Rond af op twee decimalen.

Theorie

Om te onthouden

Standaardfuncties

Er bestaan verschillende soorten **standaardfuncties**:

- Functies van de vorm $y = a \cdot x + b$ heten **lineaire functies**. De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a en snijpunt met de y -as $(0, b)$.
- Functies van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ heten **kwadratische functies**. De grafiek is een parabool met top (b, c) . Als $a > 0$ dan heb je een dalparabool, als $a < 0$ een bergparabool. Soms moet je door kwadraat afsplitsen een voorschrift van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de juiste vorm brengen.
- Functies van de vorm $y = a \cdot x^r$ heten **machtsfuncties**. Je zegt dan dat y **recht evenredig** is met x^r .

Functies van de vorm $y = a \cdot x^n$ met n geheel en $n > 2$ hebben, als n even is, een grafiek een top $(0, 0)$ en als n oneven is een symmetriepunt $(0, 0)$.

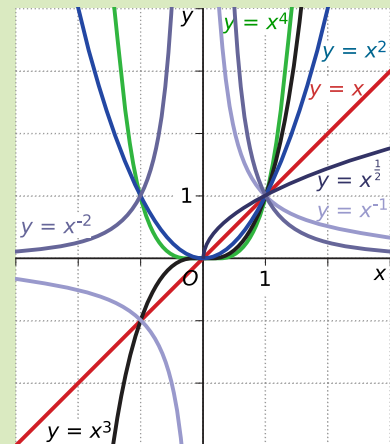
- Functies van de vorm $y = \frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$ met n geheel en $n \geq 1$ heten **gebroken functies**. Je zegt dan dat y **omgekeerd evenredig** is met x^n . De functiewaarde bij $x = 0$ bestaat niet; $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek. Voor x -waarden ver van 0 worden de functiewaarden ongeveer 0 en nadert de grafiek de horizontale as.
- Functies van de vorm $y = a \cdot \sqrt[n]{x} = a \cdot x^{\frac{1}{n}}$ met n geheel heten **(hogere machts) wortelfuncties**. Is n even dan heeft de grafiek een beginpunt of eindpunt (b, c) , is n oneven dan is $(0, 0)$ het symmetriepunt.

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door twee functies door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen met elkaar te combineren.

Karakteristieken

De **karakteristieken van een functie** zijn:

- de toegestane x -waarden vormen het **domein** van functie f ;
- de mogelijke y -waarden vormen het **bereik** van functie f ;
- de **snijpunten met de x -as** van een functie zijn de punten waarvoor geldt: $f(x) = 0$;
- het **snijpunt met de y -as** van een functie is het punt waarvoor geldt: $x = 0$;
- de **extremen** van een functie zijn de y -waarden die de functie maximaal of minimaal heeft binnen een bepaald gebied;
- een functie vertoont soms **asymptotisch gedrag**; er zijn dan lijnen die de grafiek steeds dichter benadert. Vooral bij gebroken functies komt dit voor.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven zijn de verbanden $y_1 = 2x^2 - 4x - 6$ en $y_2 = -2x - 2$.

- a Bepaal van het lineaire verband de snijpunten met de assen.
- b Schrijf het kwadratische verband in de vorm: $y = a(x - p)^2 + q$.
- c Van het kwadratische verband is de grafiek een parabool. Bepaal de top van die parabool en leg uit of het een dalparabool of een bergparabool is.
- d Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool met beide assen.

Opgave 2

Gegeven zijn de machtsfuncties $f(x) = 10 \cdot x^3$ en $g(x) = 2 \cdot x^4$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunt(en) van de grafieken van f en g .
- b Welk van beide functies heeft een top? Bepaal de coördinaten ervan.
- c Bepaal het bereik van beide functies.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

- a Bepaal het domein van beide functies en plot hun grafieken.
- b Laat zien, dat beide functies machtsfuncties zijn.
- c Welke van beide functies is recht evenredig en welke omgekeerd evenredig met $\sqrt{x}$?
- d Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- e Wat zijn de coördinaten van de beginpunten van de grafieken van f en g ?

Opgave 4

Gegeven zijn de gebroken functies $f(x) = \frac{12}{x}$ en $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- a Leg uit, hoe de grafieken van f en g er uitzien in de buurt van $x = 0$.
- b Wat gebeurt er met de grafieken van f en g als je hele grote x -waarden invult? En als je heel erg negatieve x -waarden invult?
- c Functie h ontstaat door beide functies op te tellen: $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel een formule op voor h en herleid deze tot hij uit één breuk bestaat.
- d Functie k ontstaat door beide functies op elkaar te delen: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Laat zien dat k recht evenredig is met x als $x \neq 0$.

Opgave 5

Van een bol met straal r is het volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ en de oppervlakte $A = 4\pi r^2$.

- a Laat zien, dat er een waarde van r is waarvoor volume en oppervlakte dezelfde waarde hebben.
- b Laat zien, dat de oppervlakte recht evenredig is met een macht van het volume, dus dat beide formules te combineren zijn tot één formule van de vorm $A = c \cdot V^p$. Bereken de exacte waarden van c en p .

Theorie

Om te onthouden

Standaardfuncties: exponentiële - en logaritmische functies

Exponentiële functies en logaritmische functies zijn elkaars inverse functies. De grafieken van **exponentiële verbanden** en **logaritmische verbanden** met hetzelfde grondtal hebben dezelfde vorm, maar zijn gespiegeld in de lijn $y = x$. Bekijk de figuur waarin de groeifactor, het grondtal $g = 2$.

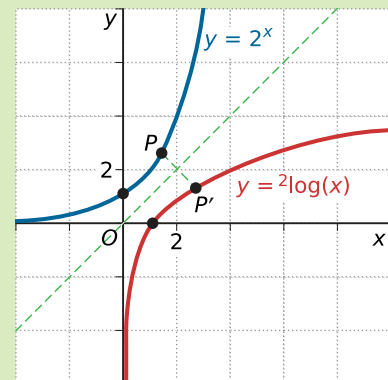
Er geldt $y = g^x$ betekent $x = {}^g\log(y)$ en omgekeerd.

De karakteristieken van de functies zijn vergelijkbaar, maar eveneens gespiegeld. Zo heeft een exponentiële functie een horizontale asymptoot, maar een logaritmische functie een verticale asymptoot. Bij een exponentiële functie is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $y > 0$. Bij een logaritmische functie is het domein $x > 0$ en het bereik $\mathbb{R}$. Beide functies hebben geen extreme waarden.

Een exponentieel verband $y = c \cdot g^x$ heeft de x -as als horizontale asymptoot en is toenemend stijgend als $g > 1$, maar afnemend dalend als $0 < g < 1$.

Bekijk de tabel met exponentiële - en logaritmische functies met hetzelfde grondtal.

exponentiële functie	logaritmische functie
$y = g^x$ met $g > 0$	$y = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$
$y = 10^x$	$y = {}^{10}\log(x) = \log(x)$
$y = e^x$ met $e = 2,718281\dots$	$y = {}^e\log(x) = \ln(x)$



Figuur 3

Het verband tussen de groeifactor g en het groeipcentage p is $g = 1 + \frac{p}{100}$ en $p = (g - 1) \cdot 100$.

De **verdubbelingstijd** bij exponentiële groei is de tijd die nodig is om de functiewaarde te verdubbelen.

De **halveringstijd** bij exponentieel verval is de tijd die nodig is om de functiewaarde te halveren.

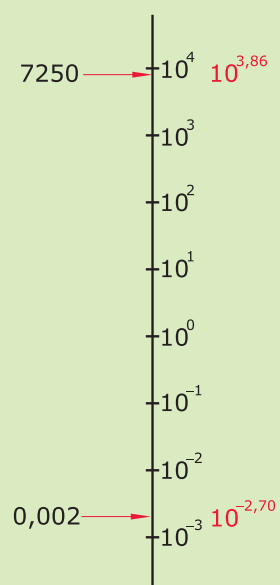
Logaritmische schaalverdeling

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen plaatsen. Met behulp van de logaritme kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- Omdat $\log(7250) \approx 3,86$ plaats je 7250 op 3,86 eenheden boven 10^0 , dat is tussen 10^3 en 10^4 .
- Omdat $\log(0,002) \approx -2,70$ plaats je 0,002 op 2,70 eenheden onder 10^0 , dat is tussen 10^{-1} en 10^{-2} .

De grafiek van een exponentieel verband op **enkellogaritmisch papier** is een rechte lijn, want $y = b \cdot a^x$ is te schrijven als: $\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$.

De grafiek van een machtsverband op **dubbellogaritmisch papier** is een rechte lijn, want $y = c \cdot x^r$ is te schrijven als: $\log(y) = r \cdot \log(x) + \log(c)$.



Figuur 4

Opgave 6

Een hoeveelheid H groeit exponentieel met 0,3% per jaar. In 2000 bedroeg deze hoeveelheid 5200.

- Schrijf een bijpassende groeiformule op.
- Als je aanneemt dat de groei van H altijd zo heeft plaatsgevonden, welke waarde benadert H als je steeds verder naar het verleden kijkt?
- Bepaal de verdubbelingstijd van H .

Opgave 7

Een hoeveelheid $H(t)$ neemt exponentieel af met 1,2% per dag. Op $t = 0$ bedroeg deze hoeveelheid 14000.

- Schrijf een bijpassende groeiformule op.
- Als je aanneemt dat de groei van H altijd zo doorgaat, welke waarde benadert H uiteindelijk?
- Bepaal de halveringstijd van H .

Opgave 8

Gegeven de functies f van de vorm $f(x) = g \log(x)$.

- Door welk punt gaan al deze grafieken? En waarom?
- Welke asymptoot hebben al deze grafieken?
- Voor welke waarden van g is de grafiek van f dalend?

Opgave 9

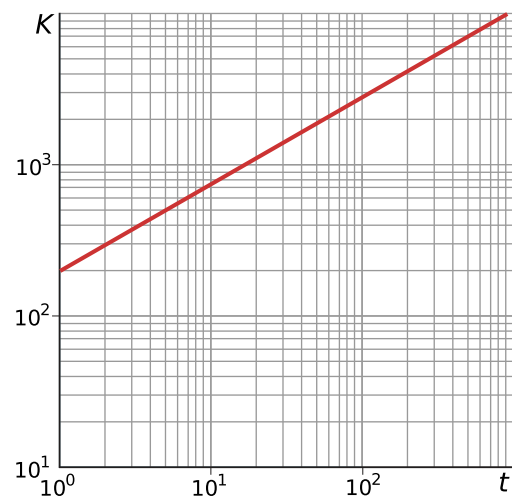
Het verband tussen p en q wordt gegeven door $q = 40 \cdot e^p$.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor van dit exponentiële verband? En het groeipercentage?
- Teken de grafiek van q als functie van p op **enkellogaritmisch papier**.
- Laat zien dat dit verband is te schrijven in de vorm $p = c \cdot \ln(dq)$ en bereken c en d .

Opgave 10

Je ziet hier een grafiek op dubbellogaritmisch papier.

Laat zien, dat de functie $K = 200 \cdot x^{0,914}$ bij deze figuur past.



Figuur 5

Theorie

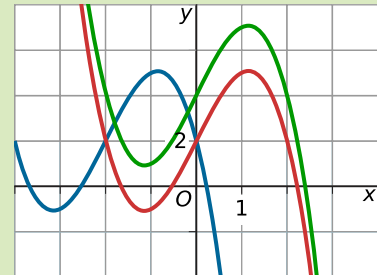
Om te onthouden

Grafieken verschuiven en-of herschalen

Ga uit van een functie $y = f(x)$, de rode grafiek in de figuur.

Je kunt deze grafiek vervormen. Bijvoorbeeld:

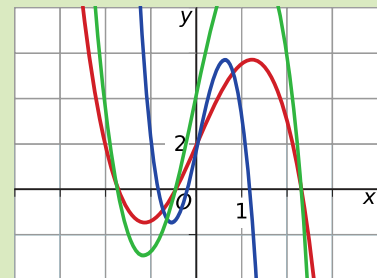
- De groene grafiek, $y = f(x) + 2$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar 'boven' te verschuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de y-richting** over 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(x + 2)$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar 'links' te schuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de x-richting** over -2.



Figuur 6

Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek, $y = 2 \cdot f(x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen. Dit noem je ook **herschalen in de y-richting** met factor 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(2 \cdot x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te herschalen. Dit noem je ook **herschalen in de x-richting** met factor $\frac{1}{2}$.



Figuur 7

Verschuivingen en herschalingen kunnen ook worden gecombineerd.

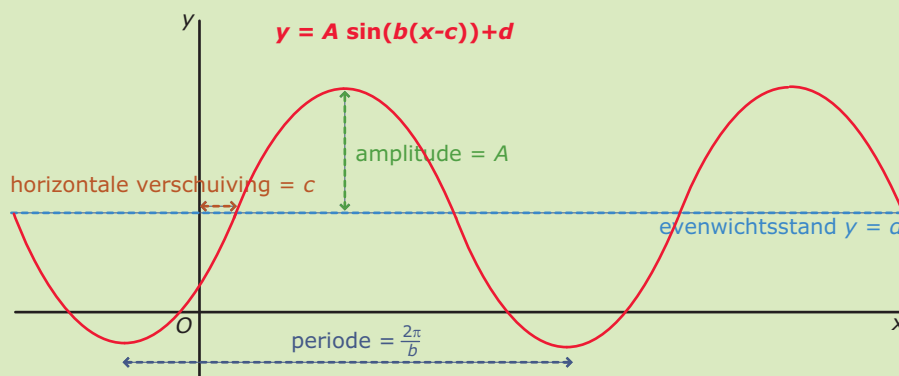
Sinusoïden

Een bekende standaardfunctie is $y = \sin(x)$ met x in radialen. Dit is een **periodieke functie** met periode 2π . Door verschuiving en herschaling ontstaat hieruit de algemene **sinusoïde**:

$$y = a \sin(b(x - c)) + d$$

met

- de **amplitude** (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) is a (of $-a$ als a negatief is);
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$ en dus is $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$;
- de **horizontale verschuiving** is c , dit is de verschuiving in de x-richting;
- de **evenwichtsstand** of evenwichtswaarde is $y = d$.



Figuur 8

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$.

- Laat zien, dat de grafiek van deze functie door verschuiven en herschalen kan ontstaan uit de standaardfunctie $y = x^2$.
- Beschrijf de verschuivingen en herschalingen die je op de grafiek van $y = x^2$ moet toepassen om die van f te krijgen.
- De standaardfunctie $y = x^2$ heeft een parabool met top $(0,0)$ als grafiek. Welke top heeft de grafiek van f ?

Opgave 12

Een glas melk heeft een temperatuur van 6°C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$$T(t) = 20 - 14 \cdot e^{-0,05t}$$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

- Door welke transformaties kan de grafiek van T ontstaan uit de standaardfunctie $y = e^t$?
- De grafiek van de standaardfunctie $y = e^t$ heeft horizontale asymptoot $y = 0$. Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van T ?

Opgave 13

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) is bij een bepaalde snelweg de formule:

$$L = 80 - 10 \log(20R)$$

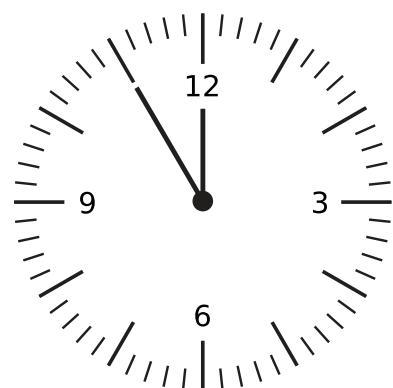
Hierin is R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluidsdrukniveau in dB.

- Door welke transformaties kan de grafiek van L ontstaan uit de standaardfunctie $y = \log(R)$?
- De grafiek van de standaardfunctie $y = \ln(R)$ heeft verticale asymptoot $R = 0$. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van L ?

Opgave 14

De wijzers van een klok maken een periodieke beweging. Een klok hangt met zijn middelpunt 1,90 meter boven de grond. De grote wijzer is 20 centimeter en de kleine wijzer is 12 centimeter.

- De hoogte tussen het puntje van de grote wijzer ten opzichte van de grond hoort bij een periodiek verband. Geef de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.
- De hoogte tussen het puntje van de kleine wijzer en de grond is een periodiek verband. Geef de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.



Figuur 9

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 \sin(\pi(x - 1)) + 3$.

- Beschrijf de verschuivingen en herschalingen die je op de grafiek van $y = \sin(x)$ moet toepassen om die van f te krijgen.
- Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van f .

Verwerken

Opgave 16: Aandelen

Veel mensen beleggen in aandelen. Daarvoor geven ze een opdracht aan een zogenoemde 'broker'. Die regelt bij een opdracht de aankoop (of de verkoop) van de door de klant gewenste aandelen. Voor het uitvoeren van een opdracht brengt de broker kosten in rekening.

Broker Haag hanteert voor een opdracht een tarief volgens de volgende formule:

$$K = 0,0045 \cdot w + 4.$$

Hierbij zijn K de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant moet echter altijd ten minste € 12,00 voor een opdracht betalen.

Een klant koopt via Haag 150 aandelen ABN die per stuk € 19,18 kosten. Een tijd later is de waarde van deze aandelen gestegen naar € 21,44 per stuk. De klant neemt het besluit alle aandelen via Haag te verkopen. Voor de berekening van zijn winst houdt de klant rekening met de kosten van aankoop en verkoop.

- Voor welke waarde van w heeft deze formule een zinvolle betekenis?
- Bereken hoeveel winst de klant heeft behaald op de aandelen ABN.

Handelaar Van der Meulen is ook een broker. Hij hanteert als tarief: $K = 0,004 \cdot w + 7$.

Hierbij zijn K weer de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant betaalt bij Van der Meulen per opdracht nooit meer dan € 46,00. Als de totale waarde van de aandelen hoog genoeg is, nemen de kosten die Van der Meulen in rekening brengt, niet verder meer toe.

- Bereken hoe groot de totale waarde van de aandelen dan tenminste moet zijn.

bron: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak

Opgave 17: Dennenhout

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte. Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruikgemaakt van de volgende formule:

$$V = f \cdot d^2 \cdot h \text{ met diameter } d \text{ en hoogte } h \text{ beide in meter.}$$

In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3 . De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom. Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (*Pinus sylvestris*).

Voor de grove den wordt het verband tussen de figuur vormfactor f en de diameter d bij benadering gegeven door de volgende formule:

$$f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$$

In een bos staat een grove den met een diameter van 0,16 m.

- Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

De grootste bekende diameter van een grove den is 1,2 m. Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d :

$$h = 44 \cdot d^{0,65}$$



Figuur 10

Ook hier zijn de diameter en de hoogte beide in meter. Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt.

- b** Bereken het volume aan hout.

Op basis van de formule $f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0,65}$ kan de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ worden geschreven als $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$. Hierin zijn a , b en c constanten.

- c** Toon aan dat V inderdaad geschreven kan worden als

$V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$ en bereken a , b en c in twee decimalen nauwkeurig.

bron: examen vwo wiskunde A in 2011, eerste tijdvak

Opgave 18: Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt. De geluidsbelasting op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen dat per jaar passeert en van het geluidsniveau van elk vliegtuig. In deze opgave nemen we aan dat er geen onderlinge verschillen tussen vliegtuigen zijn wat het geluidsniveau betreft. Door nieuwe technieken is het mogelijk het geluidsniveau L per vliegtuig steeds verder omlaag te brengen.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Nog steeds geldt er een maximale geluidsbelasting. Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen $N_{\max}$ kan geschreven worden als:

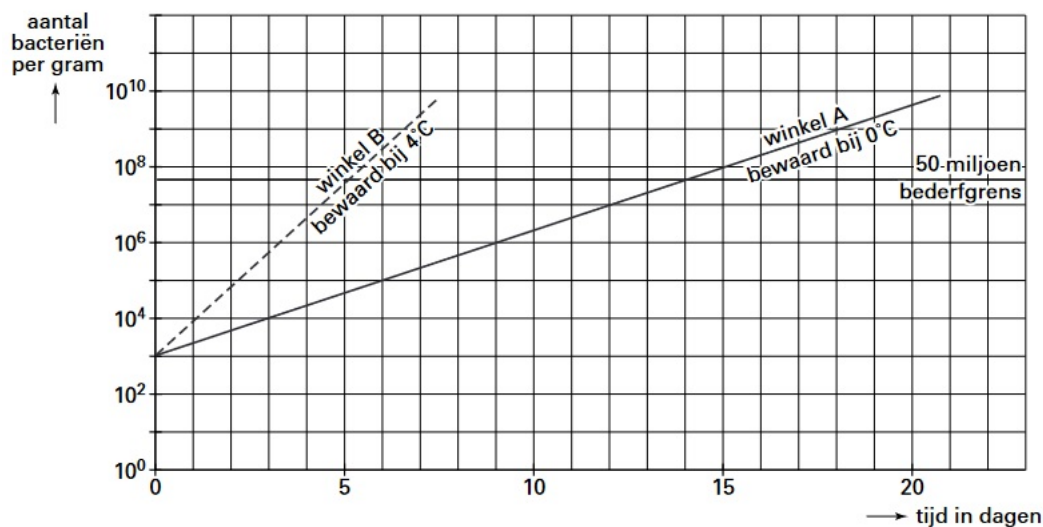
$$N_{\max} = 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 0,794^L.$$

Geef aan door welke transformaties de grafiek van $N_{\max}$ verkregen kan worden uit de standaardfunctie $N = 2^L$.

Opgave 19: Koeling

Wageningse onderzoekers hebben zich verdiept in de groei van het aantal bacteriën in voedsel. Bij constante bewaartemperatuur groeit het aantal bacteriën exponentieel. De bijbehorende groeifactor hangt af van de bewaartemperatuur. Bij een krantenartikel hierover stond de volgende grafiek. De schaalverdelingen langs de beide assen zijn zo gekozen dat de grafieken, die de groei van het aantal bacteriën weergeven, rechte lijnen zijn.

Temperatuursafhankelijkheid van het bederf van kip door pseudomonasbacteriën



Figuur 11

In de grafiek wordt de bacteriegroei beschreven in kip die bij 0 °C (winkel A) respectievelijk 4 °C (winkel B) wordt bewaard.

- a** Toon aan dat bij 0 °C het aantal bacteriën zich per dag meer dan verdubbelt.

In de figuur is het aantal bacteriën per gram bij het begin gelijk aan 1000. De bederfgrens ligt bij 50 miljoen bacteriën per gram. In de figuur is af te lezen dat kip die voortdurend op 0 °C wordt bewaard, na 14 dagen de bederfgrens bereikt. Door verbeterde hygiëne is men in staat het aantal bacteriën bij het begin terug te brengen van 1000 per gram naar 100 per gram. Dit verlengt de houdbaarheid natuurlijk. Bij bewaren bij 0 °C (winkel A) duurt het dan in totaal 17 dagen voordat de bederfgrens bereikt wordt. De houdbaarheid wordt dus met 3 dagen verlengd. Bij bewaren bij 4 °C (winkel B) wordt de houdbaarheid door die verbeterde hygiëne met minder dan 3 dagen verlengd. De groeifactor per dag die bij 4 °C hoort, is 8,3.

- b** Met hoeveel dagen wordt de houdbaarheid bij 4 °C door die verbeterde hygiëne verlengd? Licht je antwoord toe.

In de figuur kunnen we zien dat de groeifactor per dag g van het aantal bacteriën afhangt van de bewaartemperatuur. De onderzoekers hebben de volgende formule hiervoor opgesteld:

$$g = 10^{0,0092 \cdot (T+6)^2}$$

In deze formule is T de bewaartemperatuur in °C.

Met deze formule kun je dus bij iedere bewaartemperatuur de bijbehorende groeifactor berekenen.

Bij de volgende vraag gaan we uit van kip die buiten de koelkast bij een temperatuur van 18 °C bewaard wordt. Het aantal bacteriën per gram bij het begin is gelijk aan 100. De bederfgrens is nog steeds 50 miljoen bacteriën per gram.

- c** Onderzoek met een berekening of de bederfgrens binnen één dag bereikt wordt.

bron: examen vwo wiskunde A1 in 2001, eerste tijdvak

Opgave 20: Bezinning

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezinning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkeloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In de tabel is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

Tabel 1

Het dagelijks aantal uren zonneshij B bij een altijd wolkeloze hemel hangt af van het nummer van de dag n ; hierbij geldt $n = 1$ voor 1 januari.

Voor B geldt de formule $B = 12,3 + 4,6 \cdot \sin(0,0172 \cdot (n - 80))$.

Op 30 januari komt de zon op om 8:27 u.

- a** Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.
- b** Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.
- c** Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneshij. Bereken aan de hand van de formule voor B dit verschil in minuten nauwkeurig.

naar: examen vwo wiskunde A1 in 1991, eerste tijdvak

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

Inleiding



Figuur 1

Muziekfestivals zijn gigantische evenementen waar beroemde artiesten de line-up vormen. Artiesten treden om de beurt op, waarbij hun stemgeluid uit de speakers over het terrein schalt. Muziekfestivals zijn aan veel regels gebonden. Zo mag het geluid bijvoorbeeld niet te hard staan.

Geluidsniveau wordt gemeten in decibel (dB). Hoe hoger het geluidsniveau, hoe harder het geluid en hoe schadelijker voor het gehoor. De pijngrens van een mens ligt bij 170 dB, boven de 180 dB zal onherstelbare gehoorschade optreden.

De organisatie van een muziekfestival moet ervoor zorgen dat de bezoekers niet worden blootgesteld aan een geluid van meer dan 103 dB.

Verkennen

Opgave V1

Als de bezoekers niet dichterbij dan op 20 meter afstand bij de speakers komen, hoeveel speakers mag de organisatie dan maximaal bij elkaar plaatsen? Neem de grens van 103 dB in acht.

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen, basistechnieken

Bij het oplossen van een **vergelijking** gebruik je meestal benaderingstechnieken. Het **inklemmen** is een bekende methode, maar meestal gebruik je gewoon programmatuur, bijvoorbeeld in je grafische rekenmachine.

Bij het **algebraïsch** of **exact** oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ pas je de basistechnieken toe, zoals:

- de **balansmethode** waarbij je aan beide zijden hetzelfde optelt of aftrekt, of met hetzelfde vermenigvuldigt (behalve met 0 of door hetzelfde deelt (behalve door 0));
- de **terugrekenmethode** om een vergelijking van de vorm $f(x) = c$ op te lossen en bij functie f een rekenschema kan worden gemaakt;
- **ontbinden in factoren**;
- **kwadraat afsplitsen** en de **abc-formule**) bij kwadratische vergelijkingen.

De abc-formule gebruik je bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen van de vorm: $ax^2 + bx + c = 0$ De oplossingen zijn: $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $\vee$ $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ Hier-voor geldt: $D = b^2 - 4ac$ Als $D < 0$ heeft de vergelijking geen oplossing, als $D = 0$ heeft de vergelijking één oplossing, als $D > 0$ heeft de vergelijking twee oplossingen.

Ga wel altijd na of de gevonden oplossingen binnen de domeinen van de functie f en g vallen!

In veel gevallen zal er niet nadrukkelijk gevraagd worden naar een algebraïsche aanpak of een exacte oplossing. In dat geval kun je altijd terugvallen op het gebruik van de grafische rekenmachine. Schrijf dan wel duidelijk op welke functie je invoert en hoe je de grafische rekenmachine gebruikt. In principe moet iemand die jouw examenwerk straks nakijkt, jouw berekening kunnen nadoen!

Vergelijkingen, machtsfuncties

Bij machtsfuncties $y = x^n$ gebruik je bij het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid:

als $x^p = c$, dan is $x = c^{\frac{1}{p}}$ voor elke mogelijke waarde van p .

Enkele bijzondere situaties zijn:

- $p = n$ is geheel, positief en even: $x^n = c$ geeft $x = \pm c^{\frac{1}{n}} = \pm \sqrt[n]{c}$ als $c \geq 0$.
- $p = n$ is geheel, positief en oneven: $x^n = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en even: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$ als $c \geq 0$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en oneven: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$.
- Als $p = -n$ negatief is, kun je de vergelijking herleiden: $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = c$ geeft $x^n = \frac{1}{c}$.

Ongelijkheden

Een **ongelijkheid** los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Daarna gebruik je de grafiek van de functie(s) om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

Opgave 1

Los algebraïsch op.

- a** $2x - 3 < 3x + 4$
- b** $\frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{5}x + 4$
- c** $x(x + 4) < -3$
- d** $x^3 - 4x^2 \leq 0$

Opgave 2

Los op en rond indien nodig af op twee decimalen.

- a** $x^2 - 2x > -2x^2 + 4x$
- b** $x^3 < 5 - x$

Opgave 3

Bekijk de grafieken van $y_1 = 3x^4$ en $y_2 = 2x^3$.

Los op, afrondingen op drie decimalen.

- a** $2x^3 < 11$
- b** $3x^4 > 12$
- c** $2x^3 < 3x^4$

Opgave 4

Los algebraïsch op. Antwoord indien nodig in drie decimalen nauwkeurig.

- a** $x^{1\frac{1}{3}} \leq 17$
- b** $\sqrt[4]{x^3} \geq 8$

Opgave 5

Los algebraïsch op. Antwoord indien nodig in drie decimalen nauwkeurig.

- a** $x^{-2} \leq 17$
- b** $\frac{30}{x-3} \geq 5$

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen met exponentiële en logaritmische functies

Belangrijk zijn de rekenregels:

De **rekenregels voor machten** ($g > 0$)

$$g^0 = 1 \qquad g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a} \qquad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g} \qquad (g^a)^b = g^{ab}$$

De **rekenregels voor logaritmen** ($g > 0$ en $g \neq 1$)

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$$

Bij het algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen isoleer je het exponentiële deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor machten totdat er $g^{f(x)} = c$ (met $c > 0$) of $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ staat.

- $g^{f(x)} = c$ geeft $f(x) = {}^g\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$
- $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ geeft $f(x) = h(x)$

Bij de exponentiële groeifunctie $N = b \cdot g^t$ met $g > 1$ kun je de **verdubbelingstijd** berekenen door $g^t = 2$ op te lossen.

Deze tijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid b .

Bij $0 < g < 1$ kun je de **halveringstijd** van een hoeveelheid berekenen door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen isoleer je het logaritmische deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor logaritmen totdat er ${}^g\log(f(x)) = c$ of ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ staat.

- ${}^g\log(f(x)) = c$ geeft $f(x) = g^c$
- ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ geeft $f(x) = h(x)$

$y = {}^g\log(f(x))$ voor elke functie f bestaat alleen voor $f(x) > 0$. Controleer daarom altijd of de oplossingen voor x aan deze voorwaarde voldoen.

Ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

Bereken bij een ongelijkheid eerst de gelijkheid en bepaal daarmee, met behulp van een grafiek, de oplossing van de ongelijkheid. Houd hierbij rekening met eventuele asymptoten.

Opgave 6

Los algebraïsch op.

- a** $2^{2x-1} = 32$
- b** $2^{3x} = 10^x$
- c** $150 \cdot 10^{-0,1x} = 60$
- d** $50 e^{0,05x} + 10 = 100$

Opgave 7

Een hoeveelheid groeit exponentieel met 30% per jaar.
Bereken de verdubbelingstijd in jaar, rond af op één decimaal.

Opgave 8

Los algebraïsch op.

- a** ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$
- b** $\log(4 - x) = 2$

Opgave 9

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ geeft de hoeveelheid A in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

- a** Na hoeveel minuten (in één decimaal nauwkeurig) is er 300 mg in het bloed opgenomen?
- b** Waarom kun je nu geen verdubbelingstijd uitrekenen?

Opgave 10

De luchtdruk p in hPa (hectopascal) varieert met de hoogte h in km boven het zeeniveau.
Er geldt op een bepaalde plaats: $h = -19 \log(p) + 57$.

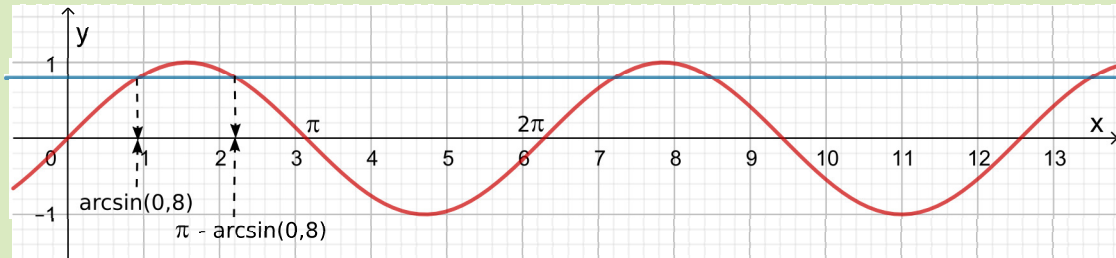
- a** Hoeveel bedraagt daar de luchtdruk op zeeniveau?
- b** Hoeveel bedraagt daar de luchtdruk op 2000 m boven zeeniveau?

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen met sinus

De vergelijking $\sin(a) = c$ heeft als oplossing $a = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee a = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$.



Figuur 2

Denk er bij het berekenen van $\arcsin(c)$ om dat je rekenmachine in radialen staat, tenzij uitdrukkelijk om graden wordt gevraagd.

Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen met sinusoiden herleid je de vergelijking tot deze vorm.

Interpoleren en extrapoleren

Waarden die niet in een tabel of grafiek voorkomen, kun je op meerdere manieren bepalen.

- Je kunt ze berekenen als je bij de tabel of de grafiek een formule kunt opstellen.
- **Grafisch interpoleren** is het schatten van waarden tussen twee gegeven waarden. Daarbij schets je een grafiek die zo goed mogelijk past bij de gegeven punten en lees je de gewenste waarde daaruit af.
- **Grafisch extrapoleren** is het schatten van waarden buiten het gebied met gegeven waarden. Daarbij schets je een grafiek die zo goed mogelijk past bij de gegeven punten, je trekt die volgens hetzelfde patroon door en je lees de gewenste waarde daaruit af.
- **Lineair interpoleren** is het schatten van waarden tussen twee gegeven waarden. Daarbij neem je aan dat twee meetpunten onderling verbonden zijn met een rechte lijn. Je neemt aan dat tussen die twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen. Zo kun je schatten door de richtingscoëfficiënt van die lijn te gebruiken.
- **Lineair extrapoleren** is het schatten van punten buiten het gebied met meetpunten. Daarbij neem je aan dat de laatste twee gegeven punten onderling verbonden zijn met een rechte lijn en dat die rechte lijn daarna in dezelfde richting doorloopt. Je neemt aan dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen. Zo kun je schatten door de richtingscoëfficiënt van die lijn te gebruiken.

Bij het schatten van waarden van een periodieke functie, of van een functie die periodiek rond een trendlijn schommelt, moet je rekening houden met de periodieke schommelingen.

Opgave 11

Gegeven is de periodieke functie f met $f(x) = 2 + 3 \sin(2\pi(x - 1))$ en $0 \leq x \leq 2$.

- a Geef de periode, de amplitude en de evenwichtsstand en plot de grafiek van deze functie.
- b Los algebraïsch op: $f(x) > 3,5$. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Bekijk de tabel.

x	134	180	210	b	240	255	261
y	65	a	46	40	31	26	c

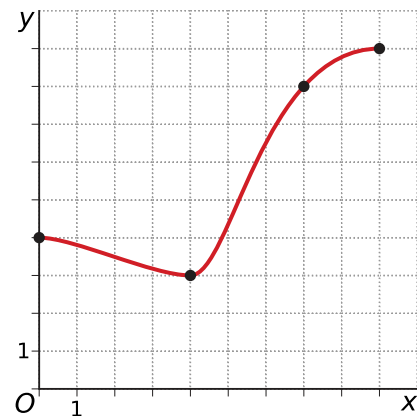
Tabel 1

- a Bereken met lineair interpoleren de waarde van a .
- b Bereken met lineair interpoleren de waarde van b .
- c Bereken met lineair extrapoleren de waarde van c .

Opgave 13

Bekijk de grafiek.

- a Bepaal met grafisch interpoleren de waarde die bij $x = 6$ hoort.
- b Bepaal met lineair interpoleren de waarde die bij $x = 6$ hoort.
- c Waarom is het bij zo'n grafiek zinloos om waarden te schatten met behulp van extrapoleren?



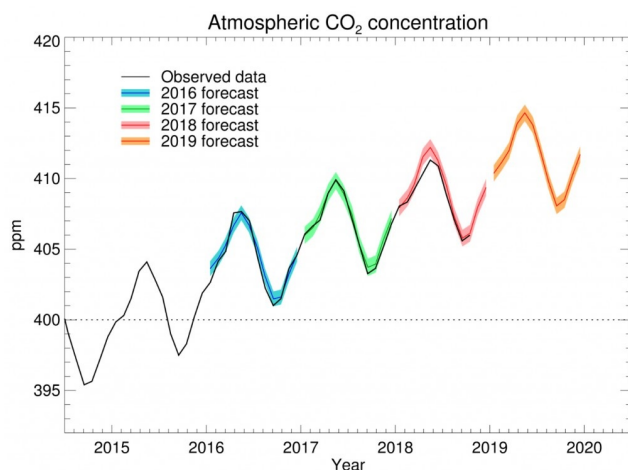
Figuur 3

Opgave 14

Je ziet hier een grafiek van de voorspelde en de gemeten concentratie CO_2 in de aardatmosfeer. (ppm betekent 'parts per million'.)

Je ziet voorspellingen voor de jaren 2016, 2017, 2018 en 2019.

- a Hoe zou je een voorspelling maken voor 2020?
- b Bepaal met lineair extrapoleren de hoogste CO_2 -concentratie in 2021. Waarom kan dit met lineair extrapoleren?



Figuur 4

Verwerken

Opgave 15: Zeemonsters

In 1972 werd de mesoplodon densirostris ontdekt in de oceaan. Het is een dolfijnensoort die 7 meter lang kan worden. Mede naar aanleiding van deze vondst deed de bioloog C. Paxton onderzoek naar de vraag hoeveel van dergelijke grote diersoorten er in de toekomst nog meer ontdekt zullen worden. Paxton beperkte zich tot wat hij zeemonsters noemde: dieren die in zee leven en meer dan 2 meter lang kunnen worden.



Figuur 5 Een mesoplodon densirostris

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende jaren stelde Paxton het volgende model op: $P(t) = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$.

Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . In deze formule is $P(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Dus als je een schatting wilt van het aantal soorten dat bijvoorbeeld op het eind van het jaar 1980 bekend is, dan moet je $t = 1980$ invullen in de formule. De uitkomst wordt afgerond op gehele. Vanaf eind 1895 tot en met eind 1995 zijn er in werkelijkheid 30 soorten ontdekt.

- Bereken hoeveel soorten er volgens het model van Paxton zouden zijn ontdekt in deze periode.
- In een bepaald jaar is de waarde van de formule van Paxton 200. In welk jaar is dat en wat is de betekenis van deze waarde?

naar: examen vwo wiskunde A in 2009, tweede tijdvak

Opgave 16: Boomgroei

Naar de groei van bomen is veel onderzoek gedaan. Dat heeft geleid tot een goed inzicht in het verband tussen de hoogte van een boom en de leeftijd van die boom. In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards: $h = a(1 - b^t)^c$. Hierin is h de hoogte van een boom in meters en t de leeftijd in jaren. De waarden van de getallen a , b en c hangen af van de soort boom. De getallen a , b en c zijn positief. In de tabel zijn deze waarden voor enkele boomsoorten weergegeven.

boom	a	b	c
Japanse lariks	23,743	0,9603	1,22770
zomereik	39,143	0,9867	0,96667
Amerikaanse eik	29,026	0,9790	0,80820
berk	43,281	0,9876	0,95040
grove den	24,426	0,9656	1,59980

Tabel 2

Het verband tussen de hoogte en de leeftijd van de zomereik wordt dus gegeven door de formule:

$$h = 39,143(1 - 0,9867t)^{0,96667}$$

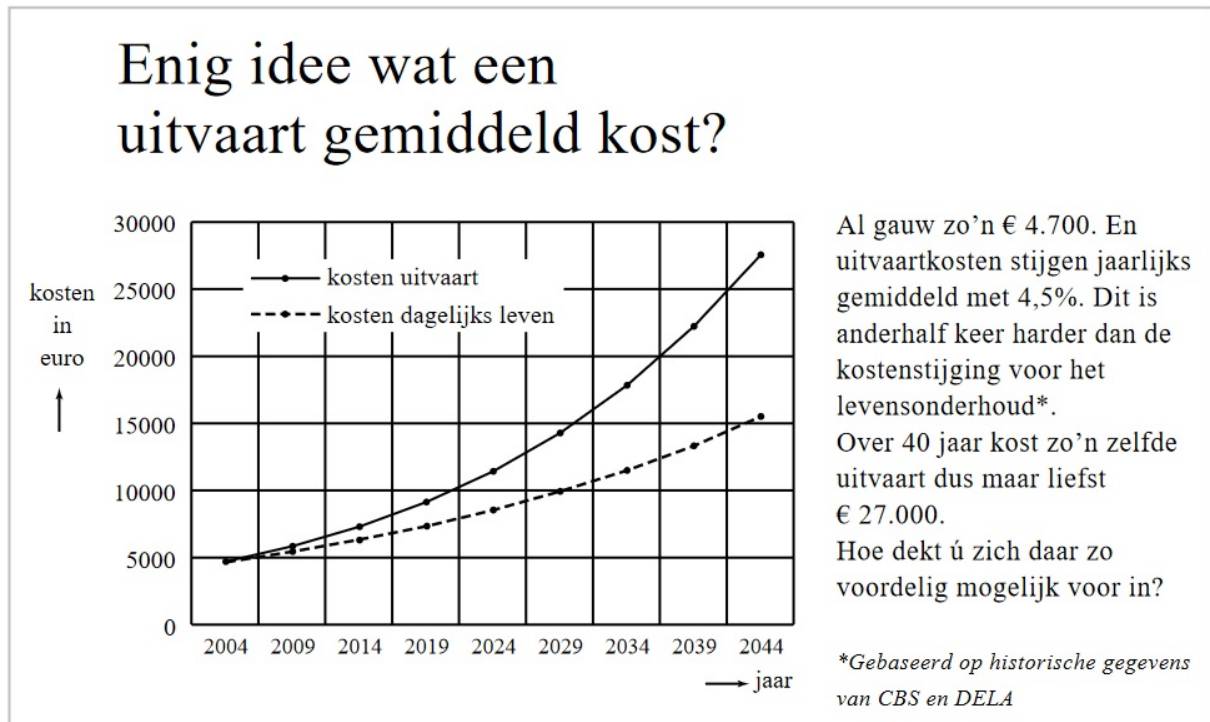
De zomereik wordt op den duur veel groter dan de Amerikaanse eik, maar in de eerste levensjaren groeit de Amerikaanse eik veel sneller.

- Toon door berekening aan dat volgens de formule van Chapman-Richards de Amerikaanse eik in het vierde levensjaar ruim 20 cm méér groeit dan de zomereik.
- Bereken hoe oud een Japanse lariks van 8 meter hoogte is.

naar: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak

Opgave 17: Verzekering

Verzekeringsmaatschappijen maken op verschillende manieren reclame voor allerlei verzekeringen. Een voorbeeld daarvan vind je in de figuur. Daar zie je een deel van een reclamefolder die in 2004 huis aan huis werd verspreid. In de folder legt de verzekeraar uit dat de kosten voor een uitvaart sneller stijgen dan de kosten voor het levensonderhoud. Ook wordt de ontwikkeling van beide kostensoorten met een grafiek in beeld gebracht.

**Figuur 6**

Uitgaande van een jaarlijkse kostenstijging met 4,5% berekende men de kosten in 2044. De uitvaartkosten stijgen van € 4700 in 2004 tot ongeveer € 27000 in 2044. Het bedrag in 2044 is afgerond op duizendtallen.

- a** Bereken dit bedrag in euro's nauwkeurig.

Met 'anderhalf keer harder' bedoelt de schrijver van de folder dat de jaarlijkse procentuele stijging van de kosten voor een uitvaart 1,5 keer zo groot is als die van de kosten voor het levensonderhoud. Daardoor zullen de kosten voor het levensonderhoud in de periode 2004-2044 stijgen met een percentage dat aanzienlijk kleiner is dan 474% (het stijgingspercentage van de uitvaartkosten). Dit is in de folder ook grafisch weergegeven.

- b** Bereken met hoeveel procent de kosten voor het levensonderhoud volgens de folder zullen toenemen in de periode 2004-2044.

bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak

Opgave 18: Powerliften

Powerliften is een krachtsport waarbij de sporter een zo groot mogelijk gewicht omhoog probeert te tillen. Het wordt beoefend door zowel mannen als vrouwen en er zijn drie categorieën: benchpress, squat en deadlift. In deze opgave beperken we ons tot benchpress voor mannen. Bij benchpress (bankdrukken) wordt een gewicht getild terwijl de sporter met zijn rug op een bank ligt.



Figuur 7

Het lichaamsgewicht van powerlifters kan enorm uiteenlopen. In deze opgave gaan we ervan uit dat een powerlifter altijd minimaal 50 kg weegt. Iemand met een groot lichaamsgewicht kan meestal meer tillen dan iemand met een klein lichaamsgewicht. Om de prestaties van powerlifters met verschillend lichaamsgewicht met elkaar te kunnen vergelijken, moet er gecorrigeerd worden voor het lichaamsgewicht. Hiervoor bestaan diverse modellen. Volgens een theoretisch model moet je als volgt corrigeren voor het lichaamsgewicht:

$$P_{\text{theoretisch}} = \frac{T}{12 \cdot L^{0,667}}$$

In deze formule is T het getilde gewicht in kg en L het lichaamsgewicht in kg, met $L \geq 50$. Het getal theoretisch P is een maat voor de prestatie: een grotere waarde van theoretisch P betekent een grotere prestatie. Een zwaardere powerlifter moet meer tillen dan een lichtere powerlifter om volgens het theoretisch model dezelfde prestatie te leveren. Een powerlifter van 70 kg tilt een gewicht van 150 kg.

- a** Bereken hoeveel kg een powerlifter van 100 kg moet tillen om volgens het theoretisch model dezelfde prestatie te leveren.

We bekijken een lichte powerlifter A met een lichaamsgewicht van 50 kg en een zware powerlifter B met een lichaamsgewicht van 150 kg. Als B volgens het theoretisch model dezelfde prestatie wil leveren als A, moet B een ruim twee keer zo groot gewicht tillen als A.

- b** Toon dit aan.

In plaats van het theoretisch model kan men ook een andere formule gebruiken om te corrigeren voor het lichaamsgewicht. De formule van Siff is zo'n formule:

$$P_{\text{Siff}} = \frac{T}{408,15 - \frac{11047}{L^{0,9371}}}$$

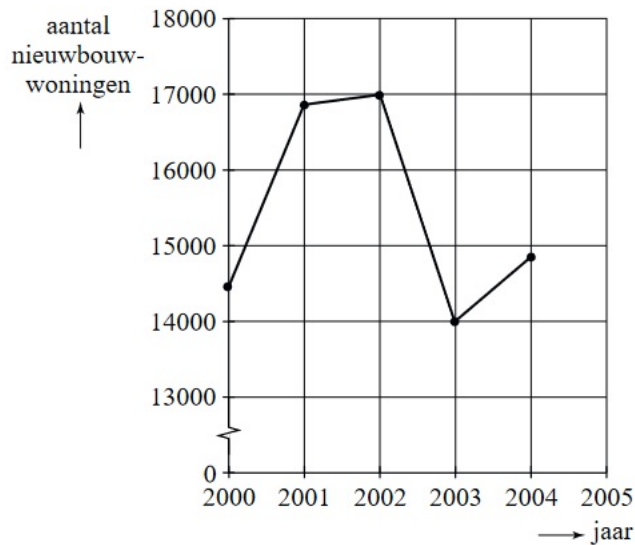
In deze formule geldt weer dat T het getilde gewicht in kg is en L het lichaamsgewicht in kg, met $L \geq 50$. Het getal P_{Siff} is een maat voor de prestatie.

- c** Bereken voor welke lichaamsgewichten de formule van Siff een hogere waarde voor de prestatie geeft dan het theoretisch model.

bron: examen vwo wiskunde A in 2010, tweede tijdvak

Opgave 19: Controle bij nieuwbouw

In Nederland worden veel woningen gebouwd. In de figuur zie je een grafiek van de aantallen nieuwbouwwoningen die in Zuid-Holland zijn gebouwd in de jaren 2000 tot en met 2004.



Figuur 8

In 2004 was men niet tevreden met het aantal nieuwbouwwoningen. Men wilde graag in 2005 even veel nieuwbouwwoningen bouwen als in 2002. Het aantal nieuwbouwwoningen in 2005 moest dan een flink percentage hoger zijn dan het aantal in 2004.

- a Bereken met behulp van de figuur dit percentage.

Bij de bouw van woningen en gebouwen controleert de overheid of de constructie veilig is. Deze controle kost tijd. Hoe duurder het gebouw, hoe meer controletijd men denkt nodig te hebben. Het verband tussen de benodigde controletijd en de bouwkosten is weergegeven in **figuur 9**.

Van een gebouw A zijn de bouwkosten 1 miljoen euro. In **figuur 9** is af te lezen dat de controletijd van gebouw A 50 uren is. Een gebouw B is twee keer zo duur als gebouw A.

- b Hoeveel keer zo groot is de controletijd van gebouw B ten opzichte van de controletijd van gebouw A? Licht je werkwijze toe.

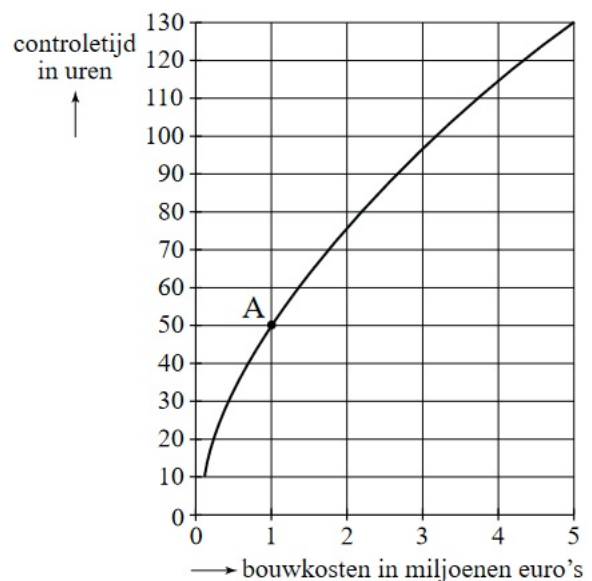
Volgens ingenieur Van Overveld kan de grafiek in **figuur 9** goed worden benaderd door de volgende formule:

$$C = (1,544 + 0,245 \log(K))^9$$

Hierin zijn C de benodigde controletijd in uren en K de geraamde bouwkosten in miljoenen euro's. Deze formule is gebaseerd op het prijspeil van het jaar 2003. We gaan ervan uit dat de formule ook geldig is voor gebouwen die meer dan 5 miljoen euro kosten.

In 2003 werden de plannen goedgekeurd voor de bouw van het Museum voor Beeld en Geluid. De bouwkosten werden geraamd op 50 miljoen euro.

- c Bereken het aantal uren dat volgens de formule nodig zou zijn voor de controle.



Figuur 9

In 2003 werd het ontwerp van het Nieuwe Rijksmuseum goedgekeurd. Volgens de formule zou de benodigde controletijd zo'n 950 uur bedragen

- d Bereken hoeveel miljoen euro de geraamde bouwkosten van het Nieuwe Rijksmuseum waren.

De formule kan ook gebruikt worden voor de jaren na 2003. Maar dan moet voor de bouwkosten wel het bedrag genomen worden dat dit gebouw in 2003 zou hebben gekost. We willen de controletijd berekenen van een gebouw waarvan in 2007 de bouwkosten 62,7 miljoen euro bedragen. De bouwkosten zijn in de periode 2003-2007 jaarlijks met 4% gestegen.

- e Bereken de controletijd van dit gebouw.

bron: examen vwo wiskunde A in 2008, tweede tijdvak

Opgave 20: Lekker lang licht

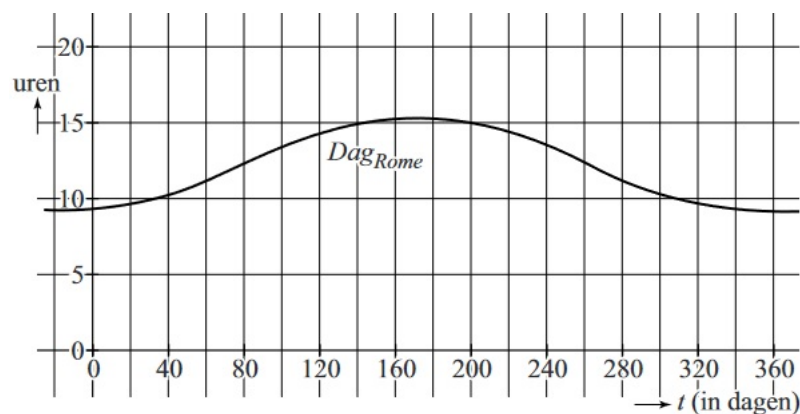
In de zomer zijn de dagen langer dan in de winter. Voor Rome in Italië geldt voor de daglengte in 2014 bij benadering de volgende formule:

$$Dag_{Rome} = 12,14 + 3,12 \sin(0,0172(t - 80))$$

Hierbij is $t = 0$ op 1 januari 2014 en t in dagen.

Hierbij is de daglengte het aantal uren tussen de zonsopgang en de zonsondergang.

In de figuur zie je de grafiek die bij deze formule hoort.



Figuur 10

We noemen het 'lekker lang licht' als de daglengte tenminste 14 uur is.

- a Bereken met behulp van de formule op hoeveel dagen in het jaar het in Rome 'lekker lang licht' is.

De lengte van de dag wordt natuurlijk bepaald door de tijden van zonsopgang en zonsondergang. Voor de tijd van zonsopgang geldt voor Rome in 2014 bij benadering de volgende formule:

$$Zonop_{Rome} = 6,59 - 1,03 \sin(0,0172(t - 80))$$

Hierbij is $t = 0$ op 1 januari 2014 en t in dagen.

- b Bereken de vroegste en de laatste zonsopgangstijd voor Rome.
- c Bepaal een formule voor de tijd van zonsondergang in Rome in 2014. Leg vervolgens met behulp van deze formule uit wat meer invloed heeft op de variatie in daglengte: de verschillen in zonsopgangtijden of de verschillen in zonsondergangtijden.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2015, tweede tijdvak

3 Formules opstellen

Inleiding



Figuur 1

De wereldbevolking is in de vorige eeuw zeer snel toegenomen. Dit komt doordat er meer mensen geboren worden dan dat er sterven en dat mensen over het algemeen steeds langer leven. Daar zijn verschillende oorzaken voor: met name de toegankelijkheid tot schoon drinkwater en een betere hygiëne heeft de levensverwachting in de 19e eeuw sterk doen stijgen. In de 20e eeuw zijn de voedselvoorziening en de kennis over het bestrijden van ziektes verbeterd.

In 1860 was de levensverwachting in Nederland maar 37 jaar. Hoewel de meeste mensen toen rond hun zeventigste jaar stierven, was de babysterfte enorm. In de loop der tijd is de levensverwachting bij geboorte in Nederland toegenomen naar gemiddeld 81 jaar in 2015. Een betere levensverwachting heeft in het algemeen een positief effect op de bevolkingsgroei: omdat ouders de kans groot achten dat hun kinderen een goede en lange toekomst krijgen, zullen zij eerder aan kinderen beginnen en eventueel meer kinderen voortbrengen.

Verkennen

Opgave V1

In 1950 bestond de wereldbevolking uit 2,5 miljard mensen en in 2005 bestond de wereldbevolking uit 6,5 miljard personen. Neem aan dat bevolkingsgroei kan worden beschreven met een exponentiële functie.

Stel een formule op voor die exponentiële groei en voorspel daarmee het aantal mensen in 2050.

Theorie

Om te onthouden

Formule opstellen van een lineair verband

Het functievoorschrift van een **lineair verband** is: $y = ax + b$.

Als de grafiek door de punten (0,6) en (3,0) gaat, is de richtingscoëfficiënt van de lijn:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-6}{3-0} = -2$$

Dit invullen samen met de coördinaten van een van beide punten in $y = ax + b$ geeft:

$$6 = -2 \cdot 0 + b, \text{ zodat } b = 6.$$

Het functievoorschrift is: $y = -2x + 6$

Dit kun je desgewenst in de vorm $px + qy = r$ schrijven: $2x + y = 6$.

Formule opstellen van een kwadratisch verband

Het functievoorschrift van een **kwadratisch verband** met top (p, q) is $y = a(x - p)^2 + q$.

De parabool met de top $(4, -2)$ wordt $y = a(x - 4)^2 - 2$.

Als hij ook door (0,6) gaat dan is $6 = a(0 - 4)^2 - 2$ en $a = 0,5$.

Het functievoorschrift van de parabool is: $y = 0,5(x - 4)^2 - 2$.

Dit kun je desgewenst schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ door de haakjes weg te werken:
 $y = 0,5(x^2 - 8x + 16) - 2 = 0,5x^2 - 4x + 6$.

Formule opstellen van een machtsverband

Het functievoorschrift van een **machtsverband** heeft de vorm $y = a \cdot x^r$.

Gaat dit machtsverband door de punten (2,32) en (3,108) dan krijg je $32 = a \cdot 2^r$ en $108 = a \cdot 3^r$

Beide vergelijkingen delen: $\frac{108}{32} = \frac{a \cdot 3^r}{a \cdot 2^r}$ geeft $\frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^r$ en $r = \frac{3}{2} \log\left(\frac{27}{8}\right) = 3$.

Het invullen van de waarde van r en de coördinaten van één van de punten in $y = a \cdot x^r$ geeft:
 $32 = a \cdot 2^3$ en $a = 4$.

Het functievoorschrift van het machtsverband door de punten (2,32) en (3,108) is $y = 4 \cdot x^3$.

Formules opstellen door combineren en/of schakelen

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door functievoorschriften door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen met elkaar te combineren.

Neem bijvoorbeeld $f(x) = 4 - x$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.

Dan is $h(x) = f(x) + g(x) = 4 - x + 2\sqrt{x}$ en $k(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{4 - x}$.

Redeneren vanuit formules

Vanuit een formule kun je vaak het gedrag van de grafiek beredeneren en/of de grafiek schetsen zonder grafische rekenmachine te gebruiken. Bijvoorbeeld:

- $K = 100 + 0,25t$ is een lineair verband met positief hellingsgetal. Als t toeneemt, neemt $0,25t$ ook toe. De grafiek is dus stijgend.
- $y = \frac{10}{x} + 300$ is ontstaan door bij een omgekeerd evenredig verband 300 op te tellen. Als x toeneemt, daalt $\frac{10}{x}$ naar 0. De grafiek benadert daarom de grenswaarde $y = 300$.
- $N = \frac{100}{1 + 4 \cdot 0,25^t}$ is een verband waarin $4 \cdot 0,25^t$ exponentieel afneemt naar 0 als t toeneemt. Dus $1 + 4 \cdot 0,25^t$ neemt af met grenswaarde 1. 100 wordt gedeeld door een kleiner wordend getal en wordt N dus groter. De grafiek stijgt naar een grenswaarde van $N = \frac{100}{1} = 100$.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(0,2)$, $B(0,6)$, $C(4,4)$ en $T(4,6)$.

- Stel een formule op van de lineaire functie waarvan de grafiek door B en C gaat.
- Stel een formule op van de kwadratische functie waarvan de grafiek door A gaat en waarvan T de top is.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van beide functies.

Opgave 2

Iemand gooit een bal met een mooie parabolische baan. Ten opzichte van een Oxy -assenstelsel begint de bal in $(0,2)$ en heeft de baan zijn hoogste punt in $(6,3)$. Neem aan dat de eenheid op beide assen 1 m is.

- Stel een bij deze baan passende formule op.
- Op hoeveel meter vanaf $(0,0)$ komt de bal op de grond?

Opgave 3

Een machtsfunctie heeft de vorm: $N(t) = at^r$. De grafiek gaat door $(4; 3,2)$ en $(9; 10,8)$.

- Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- Bereken algebraïsch voor welke waarden van t geldt $N(t) < 100$. Geef je antwoord in gehele waarden van t nauwkeurig.

Opgave 4

Een wortelfunctie heeft de vorm: $f(t) = a\sqrt{t+b}$. De grafiek gaat door $(-2,0)$ en $(0,2)$.

- Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- Laat zien, dat f een verschoven machtsfunctie is.

Opgave 5

In een assenstelsel is op de horizontale as $\log(x)$ uitgezet en op de verticale as $\log(y)$. Er is een lijn getekend door de punten $(1,5)$ en $(11,0)$.

- Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $\log(y) = a \cdot \log(x) + b$.
- Schrijf de formule in de vorm $y = c \cdot x^r$.

Opgave 6

Bekijk de volgende formules en beredeneer hoe het bijbehorende verband verloopt. Let vooral op eventuele grenswaardes. Schets de grafiek bij dit verband zonder je grafische rekenmachine te gebruiken.

- Formule: $N = 6100 \cdot 1,02^t$ met t de tijd in jaren na 2020 en N het aantal inwoners van wijk H.
- Formule: $R = \frac{30,5}{v}$ met R de reistijd in uur en v de gemiddelde snelheid in km/uur.
- Formule: $K = 310 + 0,85 \cdot q$ met q het aantal geproduceerde artikelen en K de productiekosten in euro.
- Formule: $T = 30 + 70 \cdot 0,85^t$ met t de tijd in minuten en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.
- Formule: $N = \frac{35000}{25+75 \cdot 0,96^t}$ met t de tijd in jaren en N het aantal inwoners.
- Formule: $R = 720 \cdot (10 - 4,2 \cdot 0,52^t)$ met t de tijd in jaren en R het aantal roofdieren in gebied A.

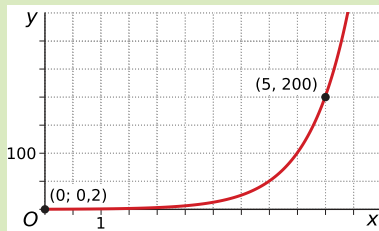
Theorie

Om te onthouden

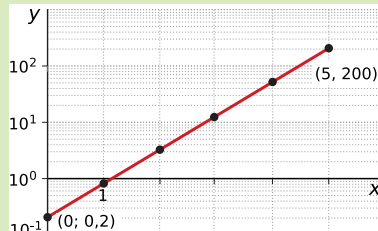
Formule opstellen van een exponentieel verband

Als een beschrijving of grafiek van een **exponentieel verband** is gegeven, kun je het functievoorschrift opstellen aan de hand van de coördinaten van twee punten op de grafiek.

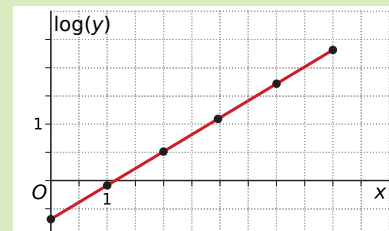
Hier zie je in drie verschillende grafieken hetzelfde verband tussen x en y .



grafiek 1
Figuur 2



grafiek 2



grafiek 3

In de eerste en ook in de tweede grafieken kun je de coördinaten van twee punten op de grafiek aflezen.

Bijvoorbeeld $(0; 0,2)$ en $(5; 200)$.

Het functievoorschrift van een exponentiële functie is: $y = a \cdot g^x$.

De groeifactor per jaar is $g = \left(\frac{200}{0,2}\right)^{\frac{1}{5}} = (1000)^{\frac{1}{5}} \approx 3,98$.

Hiermee is de waarde van a te berekenen: $0,2 = a \cdot 3,98^0$ geeft $a = 0,2$.

Het functievoorschrift wordt $y = 0,2 \cdot 3,98^x$.

In de derde grafiek kun je aflezen dat de lijn door $(0; -0,7)$ en $(5; 2,3)$ gaat.

Dit betekent dat $\log(y) = 0,6x - 0,7$.

Dit kun je schrijven als $10^{\log(y)} = 10^{0,6x - 0,7}$ en $y = 10^{-0,7} \cdot (10^{0,6})^x \approx 0,2 \cdot 3,98^x$.

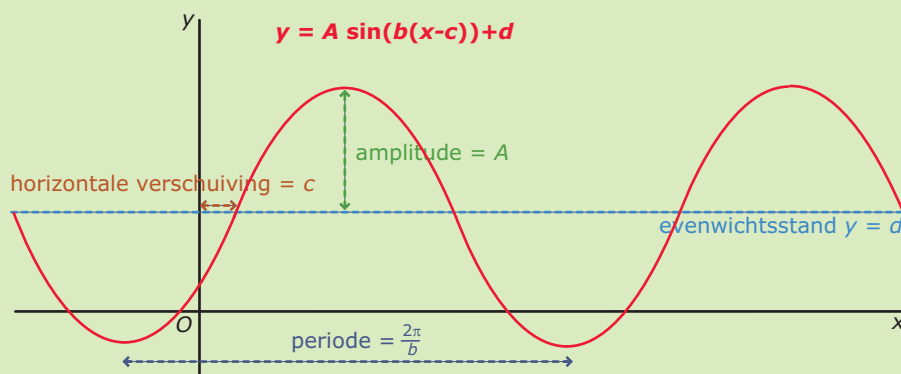
Formules opstellen van sinusoiden

De algemene **sinusoïde** heeft de vorm $y = a \sin(b(x - c)) + d$

met

- de **amplitude** (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) is a (of $-a$ als a negatief is);
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$ en dus is $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$;
- de **horizontale verschuiving** is c , dit is de verschuiving in de x -richting;
- de **evenwichtsstand** of evenwichtswaarde is $y = d$.

Vanuit deze gegevens kun je de formule opstellen.



Figuur 3

Opgave 7

De grafiek van een exponentiële functie gaat door (0,50) en (10,40).

- a Stel een bijbehorend functievoorschrift op.
- b Los algebraïsch op $y < 10$.

Opgave 8

Van een exponentiële functie is $\log(y)$ uitgezet tegen x .

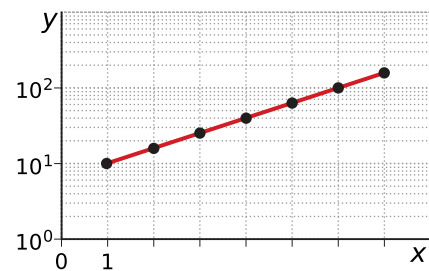
De grafiek is een rechte lijn door (0,5) en (6,17).

- a Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $\log(y) = ax + b$.
- b Schrijf het verband tussen x en y in de vorm $y = c \cdot g^x$.

Opgave 9

Bekijk deze grafiek die het verband geeft tussen x en y .

Stel een bijpassende formule op.



Figuur 4

Opgave 10

Van een radioactieve bron wordt de straling gemeten. Bij $t = 0$ is de straling 30000 becquerel, terwijl een week later op $t = 7$ een straling wordt gemeten van 6000 becquerel.

Er is een exponentieel verband tussen t in dagen en de straling S in becquerel.

Bepaal het functievoorschrift.

Opgave 11

Van een sinusöide is (2, -5) een minimum en (8, -1) het eerstvolgende maximum.

Stel een bijpassende formule op.

Verwerken

Opgave 12: Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van waardepunten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Op de website van Douwe Egberts stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld:

Kop en schotel kosten samen € 5,00. Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,00 of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,00 bijbetalen.

Bij Douwe Egberts kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50. Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

- a** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben. Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule: $W = 1 + 0,005p$.

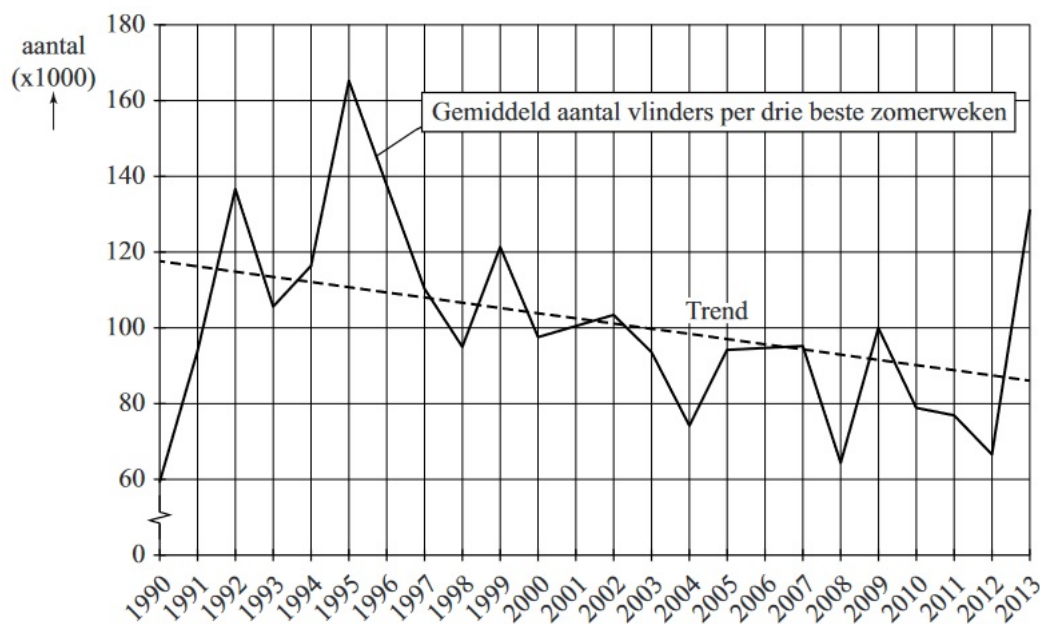
In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

- b** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

bron: examen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak

Opgave 13: Vlinders

De zomer van 2013 was een topzomer voor vlinders. Toch gaat het aantal vlinders in Nederland volgens de Vlinderstichting langzaam achteruit. In dagblad Trouw stond in augustus 2013 deze grafiek.



Figuur 5

In de grafiek is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In de grafiek is te zien dat 1995 zowel als 2013 een goed vlinderjaar was.

- a Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken 'in procenten' meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.
- b Stel een formule op voor de trendlijn van figuur 1 met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar er volgens deze trendlijn voor het eerst minder dan gemiddeld 60000 vlinders in de drie beste zomerweken zullen zijn.

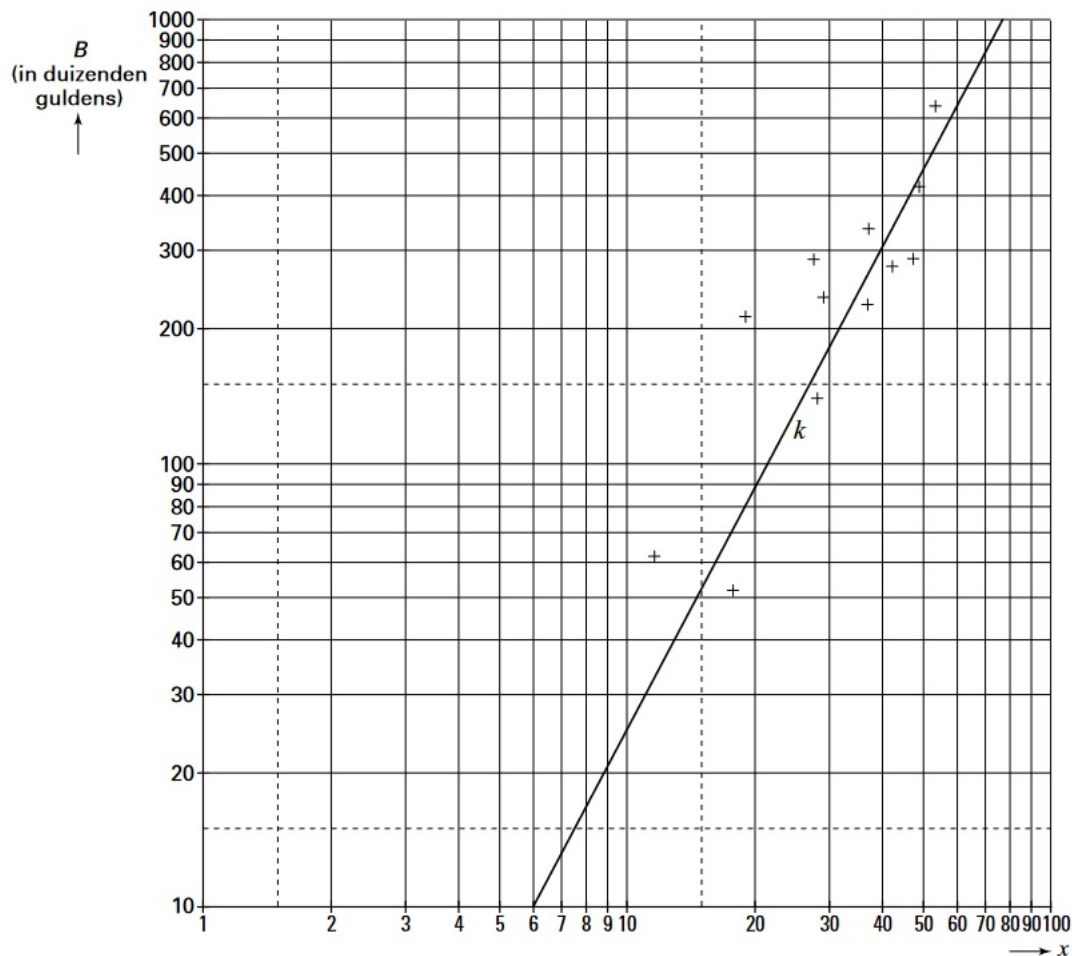
bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2016, tweede tijdvak

Opgave 14: Kavelkosten

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente.

- De kosten van aankoop van de grond. In deze situatie bedragen de kosten 170000 euro per hectare (1 hectare = 10000 m²).
- De kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.

In de figuur zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Hierbij is x het aantal woningen per hectare. B stelt voor de kosten per hectare van het bouwrijp maken in duizenden euro. Op grond van de plusjes in de figuur is een grafiek (de lijn k in de figuur) getekend die het verband tussen B en x weergeeft.



Figuur 6

Bepaal het machtsverband tussen x en B .

bron: examen wiskunde A in 2001, tweede tijdvak

Opgave 15: Ransuilen in Vaes

In 1977 troffen onderzoekers in Vaes een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet bestudeerd. Daaruit bleek onder andere dat de ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen half juni al kunnen vliegen. Uit tellingen, die steeds eind juni plaatsvonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. In de tabel staan enige resultaten.

aantal ransuilen per eind juni						
jaar	1977	1980	1982	1984	1987	1989
aantal	20	35	50	73	124	178

Tabel 1

- Toon met behulp van logaritmisch papier aan dat het aantal ransuilen van 1977 tot en met 1989 vrijwel exponentieel groeide met een groefactor van ongeveer 1,2 per jaar.
- Stel een formule op van het exponentieel verband tussen de tijd in jaren t en het aantal uilen a met $t = 0$ in 1977.

naar: examen vwo wiskunde A in 2002, tweede tijdvak

Opgave 16: Wild

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken zij overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar. Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten. In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.

- Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's. In de tabel zie je het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

jaar	2005	2006	2007
aangereden wilde zwijnen	131	275	578

Tabel 2

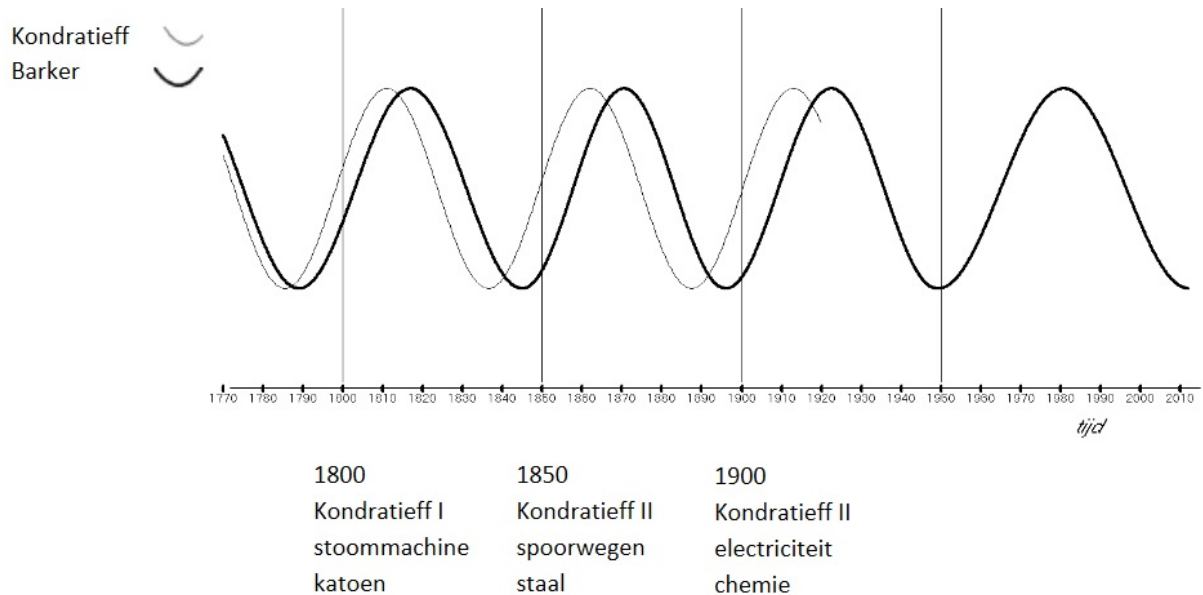
Indien we veronderstellen dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kunnen we een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaren en $t = 0$ in 2005.

- Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen aangereden worden.

bron: examen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak

Opgave 17: Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker

In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad Trouw. In de figuur, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien.



Figuur 7

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden. In de figuur is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

- a** Laat met een redenering gebaseerd op de figuur zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in de figuur getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In de figuur is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

- b** Onderzoek met behulp van de figuur in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.
- c** Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1. Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

bron: voorbeeldexamenopgaven wiskunde A in 2011

Inleiding



Figuur 1

Blikken zijn er in verschillende vormen en maten en worden gebruikt voor de opslag van allerlei producten. Veel groenten die lang houdbaar moeten zijn worden in blik verpakt, maar ook drankjes zoals cola en bier. Blikken hebben dan ook veel voordelen: ze zijn gemakkelijk te produceren en gaan niet snel stuk. Bovendien is het produceren van blikken goedkoop. Er zijn echter ook nadelen. De metalen blikken kunnen namelijk smaak afgeven aan het voedsel dat erin zit. Mensen zeggen dan weleens dat het eten naar blik smaakt.

Verkennen

Opgave V1

Een producent wil zo economisch mogelijk een nieuw soepblik ontwerpen. Hiervoor moet de benodigde hoeveelheid blik worden geminimaliseerd. Een eis is dat het soepblik de vorm van een cilinder heeft. Verder is gegeven dat er 1 L in het blik moet zitten. Welke afmetingen (diameter en hoogte) krijgt dit soepblik? Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Theorie

Om te onthouden

Verandering van een grafiek weergeven

Een **toenamediagram** geeft de verandering (toename of afname) van y weer met een vaste stapgrootte Δx .

Om bij een gegeven functie $y = f(x)$ een toenamediagram te maken, kun je op de grafische rekenmachine de functie invoeren bij y_1 en dan een toenametabel maken. Bij stapgrootte $\Delta x = 1$ voer je dan $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 1)$ in.

Vanuit een toenamediagram kun je ook de grafiek weer samenstellen vanuit een gegeven startpunt, hoewel je geen informatie hebt over het precieze verloop.

Differentiequotiënt

Bij een gegeven functie $y = f(x)$ is het **differentiequotiënt** over het interval $[a, b]$:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ook dit is een maat voor de verandering van de grafiek van f op dit interval. Je noemt dit de **gemiddelde verandering** van f op het interval $[a, b]$.

Differentiaalquotiënt en afgeleide

Bij een gegeven functie $y = f(x)$ is het **differentiaalquotiënt** voor een bepaalde waarde $x = a$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ met } h \rightarrow 0.$$

Dit is een maat voor de verandering van de grafiek van f voor deze waarde van x . Het is ook de helling van de grafiek in het punt $(a, f(a))$ en dus de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** aan de grafiek van f in dat punt. Je noemt dit wel de **afgeleide waarde** voor $x = a$:

$$f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$$

Je kunt die afgeleide waarde met je grafische rekenmachine bepalen.

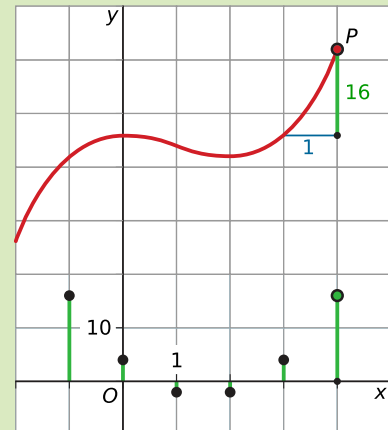
De afgeleide berekenen voor willekeurige x levert de **afgeleide functie** op:

$$f'(x) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ met } h \rightarrow 0.$$

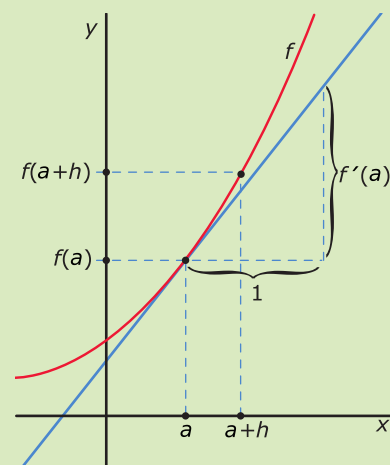
De afgeleide functie bepaal je met behulp van differentiëren.

Je kunt hem ook met je grafische rekenmachine benaderen door de grafiek te laten maken van

$$y_2 = \frac{y_1(x+0,0001) - y_1(x)}{0,0001} \text{ als bij } y_1 \text{ de functie zelf is ingevoerd.}$$



Figuur 2



Figuur 3

Opgave 1

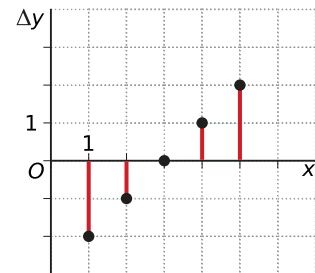
Gegeven is de functie f door $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$.

- Teken een toenamediagram op het interval $[0,6]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$.
- Voor welke waarden van x is de grafiek van f stijgend? En gaat het dan om toenemende of afnemende stijging?
- Voor welke waarden van x is de grafiek van f dalend? En gaat het dan om toenemende of afnemende daling?

Opgave 2

Gegeven is een toenamediagram van een functie die door het punt $(2,0)$ gaat.

Teken een grafiek die bij dit toenamediagram past.



Figuur 4

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[0,3]$.
- Bepaal het differentiequotiënt op het interval $[0,1]$.
- Bepaal de helling van de grafiek van f voor $x = 1$.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 \sin(\pi(x-1)) + 3$ op het interval $[0,4]$.

- Bepaal de helling van de grafiek van f voor $x = 1$.
- In welke punten van de grafiek van f is de helling 0?

Opgave 5

De luchtdruk p in hPa (hectopascal) varieert met de hoogte h in km boven het zeeniveau.

Er geldt op een bepaalde plaats: $p = 1000 \cdot 10^{-0,053h}$.

- Hoeveel daalt de luchtdruk als je van 1 km hoogte stijgt naar 1,5 km?
- Met welke snelheid daalt de luchtdruk op zeeniveau?

Theorie

Om te onthouden

Differentiëren

Het bepalen van de afgeleide functie noem je **differentiëren**. Daarvoor gelden de volgende regels:

- De **somregel**:
Als $h(x) = f(x) + g(x)$, dan is $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- De **productregel**:
Als $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan is $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- De **quotiëntregel**:
Als $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dan is $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.
- De **kettingregel**:
Als $h(x) = f(g(x))$, dan is $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Verder ken je de afgeleiden van de volgende standaardfuncties:

functie	afgeleide
$f(x) = ax^r$	$f'(x) = arx^{r-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = g^x$	$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = {}^g\log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Raaklijnen, en extremen

De **raaklijn** aan een functie f in een punt $(p, f(p))$ heeft richtingscoëfficiënt $f'(p)$ en met behulp van het gegeven punt kun je de vergelijking van die raaklijn opstellen.

De **extremen** van een functie f zitten vaak in punten waarin de raaklijn een helling van 0 heeft. Daarom bereken je extremen door $f'(x) = 0$ op te lossen en vervolgens met behulp van de grafiek deze extremen vast te stellen.

Optimaliseren

Een **optimaliseringsprobleem** is een vraag om een minimale of maximale waarde te berekenen. Eerst maak je bij het probleem een wiskundig model (modelleren). Daarna bepaal je de oplossing door met behulp van de afgeleide of met behulp van je grafische rekenmachine de extremen te berekenen.

Redeneren vanuit de afgeleide

Vanuit een afgeleide kun je vaak het gedrag van de grafiek van de functie zelf beredeneren en/of de grafiek schetsen zonder grafische rekenmachine te gebruiken. Bijvoorbeeld:

- $v'(t) = 100 + 0,25t$ is een lineaire afgeleide. Als t toeneemt, neemt $0,25t$ per stap steeds met hetzelfde getal toe. De helling van de grafiek van $v(t)$ doet dat ook, de grafiek krijgt de vorm van een parabool.
- $N'(t) = 10 \cdot 0,25^t$ is een exponentiele afgeleide met grondtal tussen 0 en 1. Als t toeneemt, wordt $0,25^t$ juist kleiner. De helling van de grafiek daalt maar wordt nooit kleiner dan 0. De grafiek van $N(t)$ nadert een asymptoot als t groter wordt.
- De afgeleide van $y = 2x - \frac{10}{x}$ is $y'(x) = 2 + \frac{10}{x^2}$. Als x toeneemt, daalt $\frac{10}{x^2}$ naar 0 en nadert de helling van $y(x)$ het getal 2. De grafiek nadert een lijn met die helling.

Opgave 6

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = (2x + 4)^3$

b $g(x) = \frac{1}{\sqrt{6-x}}$

c $h(x) = \frac{(x-3)^2}{2+x}$

d $j(x) = 4^{x^2}$

e $k(x) = \log(5x + 1)$

f $l(x) = x \ln(2x)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- a** Stel een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.
- b** Bereken de punten op de grafiek van f waarin de helling 9 is.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2$.

Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f .

Opgave 9

Een kunstenaar maakt een kunstwerk van lasdraad. Hij heeft 24 meter lasdraad. Hij maakt een balk met een vierkant grondvlak.

- a** Laat zien dat voor de inhoud van de balk geldt: $I = 6x^2 - 2x^3$.
- b** Bereken met de afgeleide de maximale inhoud van de balk.

Opgave 10

Een sapfabrikant maakt balkvormige verpakkingen van 1 liter (1000 cm^3) met een vierkante bodem. Noem de hoogte van het pak h en de breedte x .

- a** Laat zien dat voor de oppervlakte van de verpakking geldt: $A = 2x^2 + \frac{4000}{x} \text{ cm}^2$.
- b** De fabrikant wil zo goedkoop mogelijke verpakkingen produceren, met zo weinig mogelijk materiaal. Bereken met behulp van de afgeleide voor welke breedte de oppervlakte minimaal is.

Opgave 11

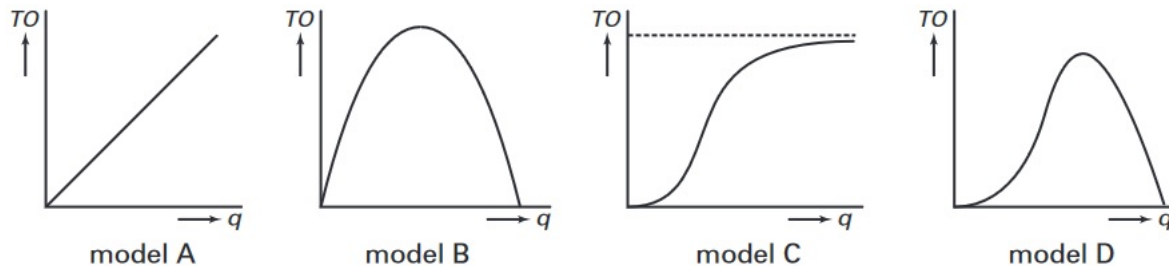
Bekijk de volgende afgeleiden en beredeneer hoe het bijbehorende verband verloopt.

- a** Afgeleide: $N'(t) = 60 \cdot 1,02^t$ met t de tijd in jaren na 2020 en N het aantal inwoners van wijk H.
- b** Afgeleide: $v'(t) = 0,35$ met v de rijsnelheid in m/s en t de tijd in s.
- c** Afgeleide: $T'(t) = -11,4 \cdot 0,85^t$ met t de tijd in minuten en T de temperatuur in °C.
- d** Afgeleide: $y'(x) = \frac{20}{x^2}$ met $x > 0$.

Verwerken

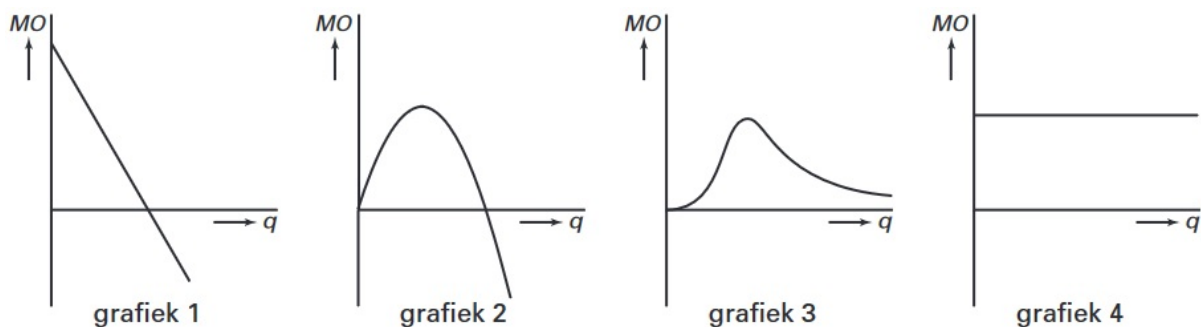
Opgave 12: Opbrengstmodellen

In de economie wordt vaak gebruikgemaakt van wiskundige modellen. Daarin komen formules voor die een theoretisch verband beschrijven tussen economische grootheden. Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO . In **figuur 5** staat voor vier verschillende economische modellen een schets van de grafiek van TO .



Figuur 5

Als we willen weten hoe de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q , dan kijken we naar de marginale opbrengst MO . In **figuur 6** zie je bij elk van de modellen uit **figuur 5** de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



Figuur 6

- a** Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 uit de ene figuur aan bij welk model uit de andere figuur deze hoort. Licht je antwoord toe.

We gaan model D uit de figuur verder bekijken. Stel dat voor het verband tussen q en TO een formule van de volgende vorm geldt: $TO = -0,01 \cdot q^3 + b \cdot q^2$ met b een positief getal. Bij elke waarde van b kan het maximum van TO worden berekend. De waarde van q waarbij dit maximum optreedt, hangt af van b . Deze waarde van q noemen we $q_{\max}$.

- b** Bereken met behulp van de afgeleide het verband tussen $q_{\max}$ en b .

naar: examen vwo wiskunde A in 2002, tweede tijdvak

Opgave 13: Emissierechten

Om de uitstoot van kooldioxide (CO₂) onder controle te krijgen verdeelt de overheid elk jaar zogenoemde emissierechten onder bedrijven die CO₂ uitstoten. Eén emissierecht betekent dat een bedrijf het recht heeft om in een jaar één ton CO₂ uit te stoten. Wanneer een bedrijf meer emissierechten heeft dan het aan CO₂ uitstoot, kan het de overgebleven rechten verkopen aan een bedrijf dat nog emissierechten nodig heeft. Deze handel in emissierechten vindt plaats op de Amsterdamse klimaatbeurs ECX. Aan de hand van een voorbeeld gaan we in de rest van deze opgave na wat de handel in emissierechten voor een bedrijf kan betekenen. Het bedrijf Fychem stoot per jaar 100000 ton CO₂ uit en beschikt over slechts 95000 emissierechten. We onderzoeken de volgende twee mogelijkheden:

- mogelijkheid 1: het bedrijf koopt er 5000 emissierechten bij;
- mogelijkheid 2: het bedrijf neemt maatregelen om de uitstoot tot 90000 ton CO₂ terug te brengen. Dit kost het bedrijf 60000 euro. Het bedrijf houdt nu 5000 emissierechten over en verkoopt die op de beurs.

We gaan ervan uit dat de koopprijs en de verkoopprijs van een emissierecht even groot zijn en noemen dat de prijs van een emissierecht. Afhankelijk van de prijs van een emissierecht kun je uitrekenen welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem. Neem aan dat de prijs van een emissierecht gelijk is aan 10 euro.

- a** Onderzoek welke mogelijkheid voor Fychem het voordeligst is.

De prijs van een emissierecht op de klimaatbeurs varieert. Bij een andere prijs dan 10 euro moet opnieuw bekeken worden welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem. Er is een prijs waarbij het voor Fychem niet uitmaakt welke van de twee genoemde mogelijkheden wordt gekozen.

- b** Bereken in dat geval de prijs van een emissierecht.

De kosten om de uitstoot van CO₂ te verminderen hangen af van de hoeveelheid waarmee de uitstoot wordt verminderd. Voor Fychem geldt de volgende formule: $K(x) = \frac{540x}{100000-x}$

In deze formule stelt K de kosten voor in duizenden euro's en x het aantal ton waarmee de CO₂-uitstoot wordt verminderd. Hoe meer Fychem de uitstoot van CO₂ vermindert, des te meer kosten zal het bedrijf hiervoor moeten maken.

- c** Beredeneer dit met behulp van differentiëren.

bron: examen vwo wiskunde A in 2009, eerste tijdvak

Opgave 14: Marathonloopsters

De olympische hardlooppwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 kilometer, om precies te zijn 42195 meter. De marathon wordt zowel door mannen als door vrouwen gelopen. In deze opgave concentreren we ons op de marathonloopsters. De prestatie van een loopster geeft men in krantenberichten meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Dit noemen we kortweg de snelheid. Deze snelheid drukken we uit in m/s (meter per seconde). Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

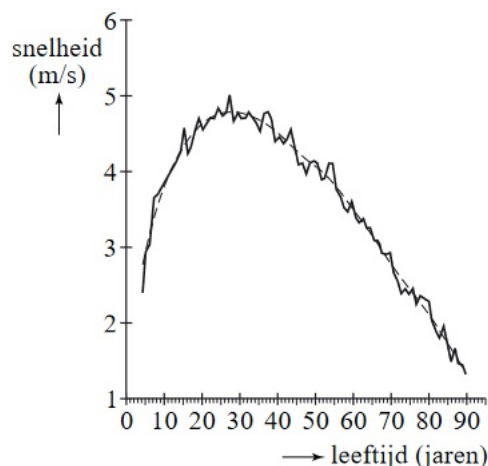
- a** Bereken haar snelheid in m/s.

Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden. De figuur is afkomstig uit het rapport dat hij daarover geschreven heeft. In de figuur is voor iedere leeftijd weergegeven de hoogste snelheid ooit gelopen door een Amerikaanse (zie de 'zigzaglijn'). De geregistreerde leeftijden lopen van 6 tot en met 90 jaar.

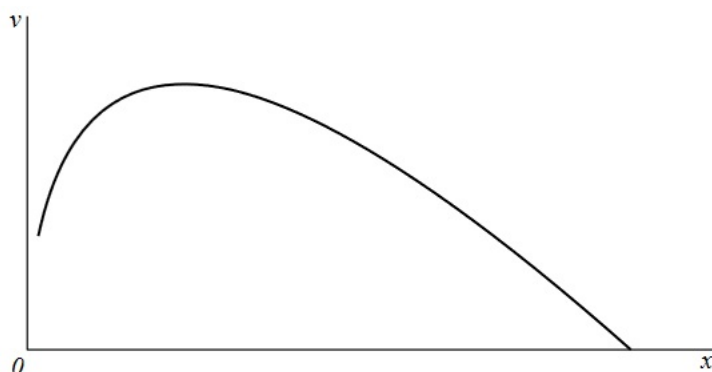
De 'zigzaglijn' is in **figuur 8** benaderd door de grafiek met de formule:

$$v = 2,836 \cdot x^{0,665} - 1,390 \cdot x^{0,818}$$

Hierin is v de hoogste snelheid in m/s van marathonloopsters met een leeftijd van x jaar. In de figuur is de grafiek van v weergegeven.



Figuur 7



Figuur 8

In het vervolg van deze opgave beschouwen we deze laatste grafiek en de formule voor v als een wetenschappelijk model van de werkelijkheid. Petra loopt vaker een marathon en hoopt binnenkort de marathon binnen 3 uur te volbrengen. Petra is 52 jaar.

- b** Kan een 52-jarige marathonloopster volgens dit model de marathon binnen 3 uur lopen? Licht je antwoord toe.

De grafiek van v heeft een maximum. Volgens het model is er dus blijkbaar een leeftijd waarop marathonloopsters (gemiddeld) het beste presteren.

- c** Stel de afgeleide van v op en bereken hiermee deze leeftijd.

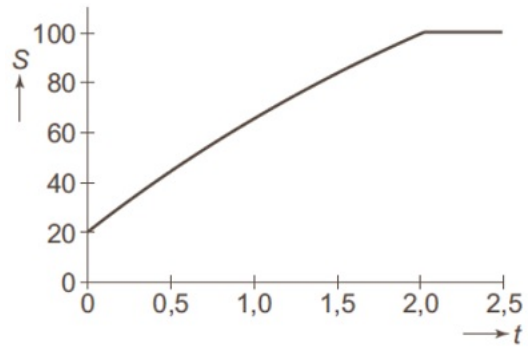
bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak

Opgave 15: Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Voor het opwarmen geldt de formule

$$S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$$

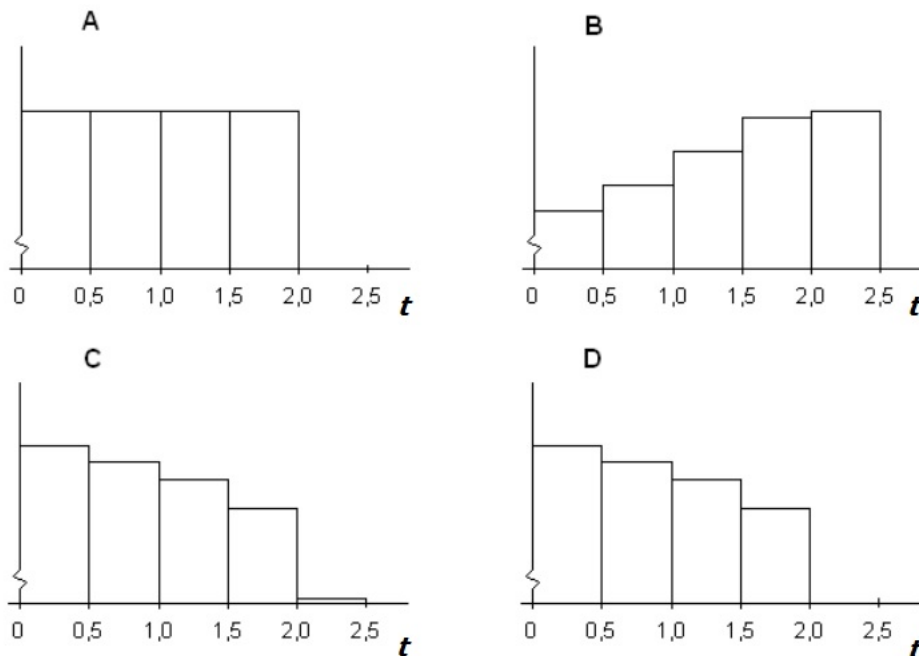
Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15:00 uur. De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden. In de figuur staat de grafiek van S .



Figuur 9

- a Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

Om na te gaan hoe de opwarming van de sauna verloopt, wil men kijken naar een toenamediagram dat hierbij hoort. In de figuur zie je vier toenamediagrammen, allemaal met een stapgrootte van een half uur, voor de periode van 15:00 uur tot 17:30 uur.



Figuur 10

- b Welk van de in de figuur geschetste diagrammen is het juiste toenamediagram? Licht je antwoord toe.
- c Als je in de grafiek van S naar het opwarmen kijkt, lijkt de temperatuur afnemend te stijgen. Onderzoek met behulp van differentiëren of deze conclusie juist is.
- d Bereken $S'(1)$, afgerond op één decimaal en geef de betekenis ervan in deze situatie.
- Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoelang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S .
- e Druk t uit in S .

bron: syllabus vwo wiskunde A in 2011

Opgave 16: Golvend dak

Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal.

In **figuur 12** is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule:

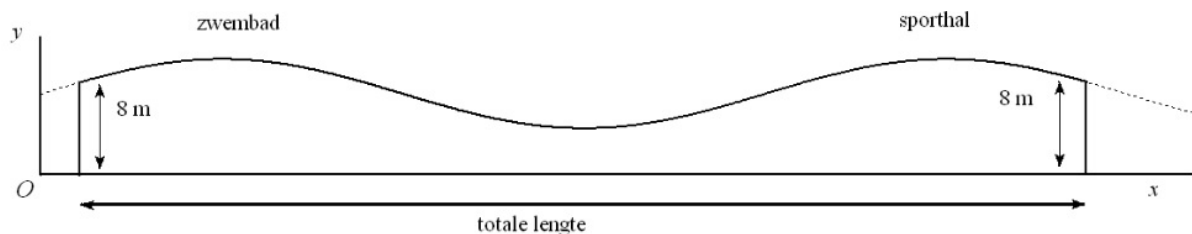
$$h = 3 \cdot \sin(0,1 \cdot x) + 7$$

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog. Zie **figuur 12**.



Figuur 11



Figuur 12

- Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.
- Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.
- Zoals je aan de grafiek in de figuur kunt zien, is de helling van het vooraanzicht niet overal hetzelfde. Op hoeveel meter van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw (zie de figuur) is de helling het grootst? Licht je antwoord toe.

bron: syllabus wiskunde A in 2011

Inleiding



Figuur 1

Het getal van de gulden snede (weergegeven als φ) kom je in de loop van de geschiedenis veel tegen als een maat voor verhoudingen. Volgens velen verhouden de afmetingen van het ideale lichaam zich tot de gulden snede. Zo zou de middelste voortand zich verhouden tot de kleinere tand ernaast als $\varphi : 1$. En de afstand van de neus tot het oog zou zich met de gulden snede verhouden tot de breedte van het oog.

De gulden snede kun je op verschillende manieren berekenen. Eén van deze manieren is met behulp van de rij van Fibonacci. Deze rij wordt gegeven door $u(1) = 1$ en $u(2) = 1$, met de recursieformule: $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$.

Vervolgens kan de gulden snede worden benaderd door: $\varphi \approx \frac{u(n)}{u(n-1)}$.

Hoe groter de n voor de rij van Fibonacci, hoe beter je benadering.

Verkennen

Opgave V1

Bepaal een benadering voor de gulden snede. Gebruik het 20^e en 21^e getal uit de rij van Fibonacci.

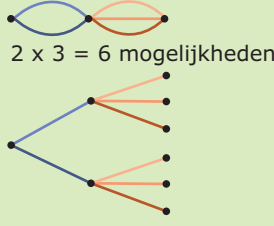
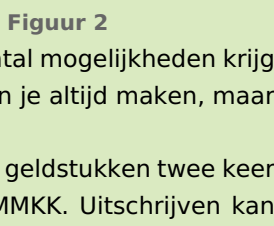
Bepaal ook de afwijking van deze benadering met: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Theorie

Om te onthouden

Systematisch tellen van mogelijkheden

Voor het systematisch tellen van mogelijkheden bestaan hulpmiddelen.

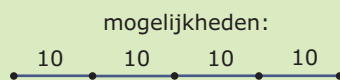
- Het **wegendiagram** is een schema (een graaf) waarin je de mogelijkheden weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Het kan ontstaan als compacte versie van een boomdiagram. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen. 
- Het **boomdiagram** is een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Dit boomdiagram heeft twee lagen met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door het aantal takken in de laatste laag te tellen. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan erg groot zijn. 
- Systematisch **uitschrijven**. Er zijn zes manieren om bij het gooien met vier geldstukken twee keer kop en twee keer munt te gooien: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Uitschrijven kan altijd, maar het kan veel tijd kosten en je vergeet snel mogelijkheden.
- Dit **rooster** laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij het werpen met twee munten zien. Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal vakjes met een uitkomst. Een rooster kun je maken als je maar twee verschillende series mogelijke uitkomsten hebt. 

Figuur 2

Figuur 3

Machten en faculteiten

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je 10^4 mogelijkheden.



Figuur 4

Als herhaling niet is toegestaan, dan krijg je te maken met vermenigvuldiging van een rij getallen die steeds met één vermindert. De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen n tot en met 1 wordt **n-faculteit** genoemd. Dit schrijf je als $n!$.

Dus $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. De rekenmachine heeft een functie om faculteiten te berekenen.

Permutaties en combinaties

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is niet toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mogelijkheden.

Dit noem je het aantal **permutaties** van vier uit tien elementen. Het woord 'permutationem' (Latijn) betekent verwisseling.



Figuur 5

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen zonder herhaling waarvan hun onderlinge volgorde niet van belang is, heb je $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ mogelijkheden.

De rekenmachine heeft een functie om permutaties te berekenen.

Dit heet het aantal **combinaties** van vier elementen uit tien elementen. Je noteert $\binom{10}{4}$ en je zegt: "tien boven vier".

De rekenmachine heeft een functie om combinaties te berekenen.

Opgave 1

Een merk e-bike is verkrijgbaar in de types A, B, C en D. Elk type is leverbaar met een accu 100 of accu 200. Verder kan een klant kiezen uit de kleuren wit, geel, rood, blauw, zwart of roodbruin.

- a Hoeveel soorten e-bikes kunnen er in totaal besteld worden?
- b Jannes wil niet het type B of D en hij wil per se een blauwe e-bike.
Uit hoeveel mogelijkheden kan Jannes dan nog kiezen?

Opgave 2

Met een zescijferige code kun je een toegangspoort openen. Bij deze code gaat het om een code van zes cijfers (0, 1, 2, ..., 9). Ga ervan uit dat voor elk cijfer waaruit de code bestaat, alle mogelijkheden zijn toegestaan.

- a Bereken hoeveel codes van zes cijfers er mogelijk zijn.
- b Als je weet dat in ieder geval het eerste en derde cijfer een oneven getal zijn, hoeveel codes zijn er dan mogelijk?
- c Je weet nog dat een blok van vier drieën heeft en twee andere verschillende cijfers heeft. Hoeveel codes zijn er zo mogelijk?

Opgave 3

Tijdens de finale van de 400 meter wisselslag op het Europees kampioenschap korte baan strijden acht zwemmers om drie medailles. De zwemmers zijn allemaal topatleten. Veronderstel dat alle denkbare volgordes van binnenkomst mogelijk zijn. Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld? En hoeveel uitslagen zijn er in totaal mogelijk?

Opgave 4

Iemand werpt negen keer met een munt en let op het aantal keren dat hij "kop" gooit.

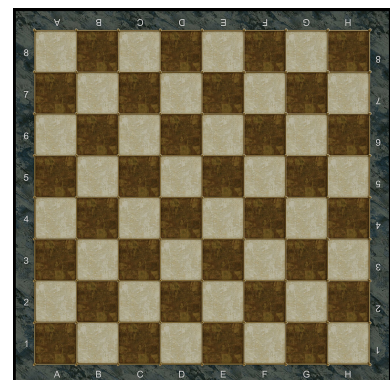
- a Op hoeveel manieren kan zij drie keer "kop" gooien? En hoe teken je dit in een "ja/nee"-rooster.
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- c Op hoeveel manieren kan zij minstens zeven keer "kop" gooien?
- d Op hoeveel manieren kan zij hoogstens zeven keer "kop" gooien?

Opgave 5

Bekijk het schaakbord. De startpositie van de koning is E1.

De koning verplaatst zich altijd 1 vakje (links, rechts, vooruit, achteruit of schuin).

Op hoeveel manieren kan de koning op een schaakbord vanuit zijn startpositie op de eerste rij in 7 zetten de achterste rij bereiken?



Figuur 6

Theorie

Om te onthouden

Rijen beschrijven

Een **rij** getallen u_n met regelmaat kun je op twee manieren beschrijven:

- Een **recursieformule** is een formule waarmee je elke term berekent uit zijn voorgaande (of uit meerdere voorgaande). Je spreekt dan van een **recursief** gegeven rij: $u_n = f(u_{n-1})$ met $n = (0, 1, 2, 3, \dots$
- Een **directe formule** is een formule waarmee je elke term berekent door de juiste waarde van n in te vullen: $u_n = f(n)$ met $n = (0, 1, 2, 3, \dots$

De **verschilrij** van u_n is de rij $V_n = u_{n+1} - u_n$.

De **somrij** van u_n is de rij $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Opmerking: In plaats van u_n wordt ook vaak $u(n)$ gebruikt, etc.

Rijen kun je op je grafische rekenmachine in beeld brengen met een speciale instelling waarin je de recursie moet gebruiken. Maar je kunt ze ook invoeren als functie als je de directe formule hebt.

Rekenkundige rijen

Bij een rekenkundige rij ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste toename a op te tellen.

- recursieformule: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$ en $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
recursieformule: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_1 = b$ en $n = 1, 2, 3, \dots$
- directe formule: $u_n = b + a \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
directe formule: $u_n = b + a \cdot (n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

De verschilrij van deze rekenkundige rij is $V_n = a$.

De somrij van deze rekenkundige rij is $S_n = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$. Dat is de som van de eerste $n + 1$ termen.

Meetkundige rijen

Bij een meetkundige rij ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste factor r (de **reden**) te vermenigvuldigen.

- recursieformule: $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = b$ en $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
recursieformule: $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = b$ en $n = 1, 2, 3, \dots$
- directe formule: $u_n = b \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
directe formule: $u_n = b \cdot r^{n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

De verschilrij van deze rekenkundige rij is $V_n = b(1 - r^{-1})r^n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

De somrij van deze rekenkundige rij is $S_n = b \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. Dat is de som van de eerste $n + 1$ termen.

Opgave 6

Bekijk de rij $u : 3, 9, 15, 21, \dots$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Wat voor soort rij betreft dit? Bereken u_{10}
- b Beschrijf de rij met een recursieformule en een directe formule.
- c Bereken de som van de eerste 20 termen.

Opgave 7

Bekijk de rij $u : 3, 12, 48, 192, \dots$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Wat voor soort rij betreft dit? Bereken u_{10}
- b Beschrijf de rij met een recursieformule en een directe formule.
- c Schrijf een recursieformule en een directe formule van de verschilrij op.
- d Bereken de som van de eerste 20 termen.

Opgave 8

Gegeven is de rij u_n door de recursieformule $u_n = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 2$.

Bereken u_3 . Rond af op één decimaal.

Opgave 9

Langs een rivier in de Betuwe leven muskusratten. Zonder invloeden van buitenaf zou de hoeveelheid muskusratten jaarlijks verviervoudigen. Op 1 januari 2020 zijn er 50 muskusratten. Stel dat er geen invloeden zijn van buitenaf.

- a Stel een recursieformule en een directe formule op voor de hoeveelheid muskusratten per jaar m_t , met $t = 0$ op 1 januari 2020.
- b Als er meer dan 50000 muskusratten zijn, is er sprake van een rattenplaag. Aan het begin van welk jaar is er zo'n plaag? Hoeveel muskusratten leven er dan langs de rivier?

Opgave 10

Beatrice en Achmed huren ieder een appartement. In 2020 moesten ze daarvoor allebei € 7350 aan huur betalen. De huur voor Beatrice wordt jaarlijks verhoogd met € 300, die van Achmed wordt jaarlijks verhoogd met 2,75%.

- a Stel directe formules op voor de huur b_n van Beatrice en a_n van Achmed n jaar na 2020 met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Wie betaalt er in 2029 de meeste huur?
- c Stel dat ze beiden 20 jaar in hun appartement blijven wonen en de huurprijzen zich zo blijven ontwikkelen? Wie heeft dan aan het eind van deze periode het meeste aan huur in totaal betaald?

Verwerken

Opgave 11: Vierkanten

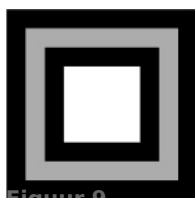
Op de foto zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat is opgebouwd uit 25 bij 25 vierkanten.

Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante 'randen' eromheen.

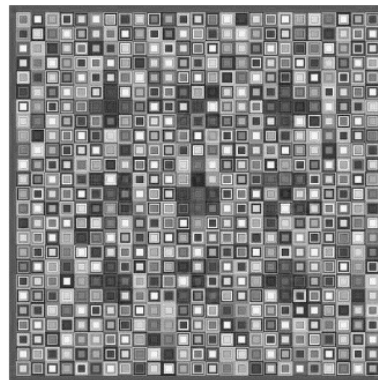
Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn.



Figuur 8



Figuur 9



Figuur 7

In **figuren 8 en 9** zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van **figuur 8** zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meerdere keren voorkomen (zie **figuur 9**). En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

- a** Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers:

wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4.

Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In **figuur 8** is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.

Figuur 9 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

- b** Bereken op dezelfde manier welk getal in **figuur 9** afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het magische getal. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In **figuur 10** zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Figuur 10

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

- c** Bereken met behulp van deze formule het magische getal van het grote kunstwerk.

- d** In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door te bedenken dat het magische getal gelijk is aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

naar: pilotexamen vwo wiskunde A in 2013, eerste tijdvak

Opgave 12: Tandpasta

Drogisterijketen Haarsma verkoopt 'Hagelwit' tandpasta. Aan het eind van elke maand koopt Haarsma deze tandpasta in bij de groothandel. Haarsma moet daarvoor elke maand een schatting maken van het aantal tubes dat hij de volgende maand zal verkopen.

In de bedrijfskunde worden verschillende methodes gebruikt om zo'n schatting te maken. Een van die methodes komt in deze opgave aan de orde.

In een bepaald jaar heeft Haarsma in januari 5200 tubes verkocht en in februari 4000. Een eenvoudig model om de verkoop voor de komende maanden te schatten is het volgende: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorafgaande maanden. In een formule:

$$V_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot V_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot V_n$$

Hierbij is V_n het aantal verkochte tubes tandpasta in maand n waarbij $n = 1$ overeenkomt met januari. Volgens dit model verwacht Haarsma in maart 4600 tubes te verkopen.

Als we aannemen dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kunnen we met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. Dat betekent hier dat er in maart inderdaad 4600 tubes tandpasta verkocht worden. En met de getallen 4000 van februari en 4600 van maart kun je met de formule weer de verkoop van april berekenen, enzovoort.

- a** Bereken het aantal tubes tandpasta dat volgens dit model in juni wordt verkocht.

Soms besluit men de laatste maand zwaarder te laten meetellen dan de voorlaatste maand. Bij de schatting voor de maand maart telt men bijvoorbeeld februari voor 60% mee en januari voor 40%. De formule wordt dan:

$$V_{n+2} = 0,6V_{n+1} + 0,4V_n \text{ met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Als met dit model een groot aantal maanden wordt doorgerekend, komen de waarden van V steeds dichterbij de evenwichtswaarde 4343 te liggen. Dat betekent dat na een aantal maanden de schattingen minder dan 1% van 4343 zullen afwijken.

- b** Bereken in welke maand de schatting voor het eerst minder dan 1% van 4343 afwijkt.

Een algemene vorm van het model ziet er als volgt uit:

$$V_{n+2} = a \cdot V_{n+1} + (1 - a) \cdot V_n \text{ en } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Hierbij is a een getal tussen 0 en 1.

Wanneer we $a = 0,5$ kiezen, krijgen we het model uit een eerdere opgave.

Als $a = 0,6$ hebben we het model van de vorige opgave.

De schatting van de verkoop voor de maanden na februari hangt nu af van de waarde van a . Zo kunnen we bijvoorbeeld V_4 , de schatting voor april, uitdrukken in a . Dat levert de volgende formule op: $V_4 = -1200a^2 + 1200a + 4000$.

- c** Laat zien hoe deze formule uit de gegevens kan worden afgeleid.

bron: examen vwo wiskunde A in 2008, tweede tijdvak

Opgave 13: Zaadjes

Dieren blijken een formidabel geheugen te hebben voor wat betreft hun voedselvoorziening. Zo is er onderzoek gedaan naar de glanskopmees, een vogeltje dat zich voornamelijk voedt met zaadjes. Wanneer zo'n vogeltje ergens wat zaad ontdekt, gaat het de zaadjes stuk voor stuk verstoppen in de omgeving, om ze in de loop van de volgende uren of dagen rustig op te kunnen eten.

Om na te gaan hoe goed het geheugen van deze vogeltjes is, gebruikten onderzoekers een kooi met een aantal gladde takken. De onderzoekers hadden in die takken in totaal 24 gaten geboord, elk precies groot genoeg voor één zaadje. Voor elk gat was een lapje gehangen, dat opgetild moest worden om te zien of het gat een zaadje bevatte.

Een glanskopmees werd in de kooi gelaten met een bakje zaad. Het vogeltje verstopte in 10 gaten een zaadje.

- a** Op hoeveel verschillende manieren kan het vogeltje deze tien gaten kiezen?

Het vogeltje en het bakje werden daarna uit de kooi gehaald. Enige uren later werd het vogeltje weer in de kooi teruggezet, waarna het op zoek ging naar de zaadjes. De onderzoekers vroegen zich af hoeveel verschillende gaten het vogeltje zou inspecteren tot het vier van de tien zaadjes heeft gevonden.

- b** Welke getallen zijn mogelijk als antwoord op de vraag van de onderzoekers?

bron: examen vwo wiskunde A in 1998, tweede tijdvak

Opgave 14: Bevolkingsgroei

De wereldbevolking neemt nog steeds toe, maar groeit niet in ieder werelddeel even hard. De figuur laat zien hoe men in 1984 verwachtte dat de bevolking zich zou ontwikkelen.

In 2000 bedroeg de wereldbevolking 6,1 miljard mensen.

- a** Onderzoek of dit aantal in overeenstemming is met de figuur.

Onlangs stelde iemand het volgende model op om een ruwe schatting van de toekomstige wereldbevolking te maken:

$$B_n = B_{n-1} + 0,3B_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{B_{n-1}}{10,9}\right) \text{ met } B_0 = 6,1$$

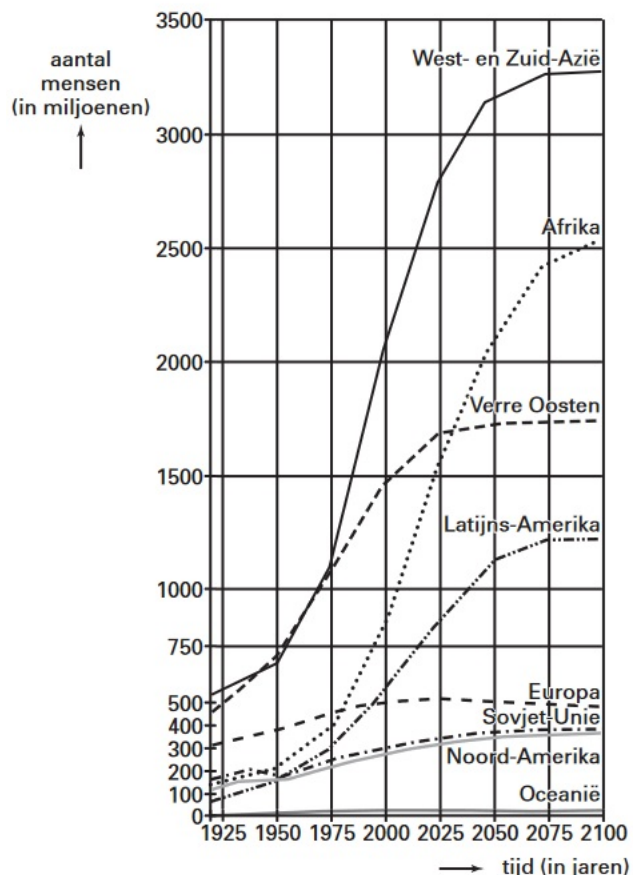
Hierin is B_n de wereldbevolking in miljarden mensen en n het aantal eenheden van 10 jaar na 2000. Dus B_0 is de wereldbevolking in 2000, B_1 de wereldbevolking in 2100, enzovoort. De volgende vragen hebben betrekking op dit model.

Volgens dit model zal de wereldbevolking op de lange duur een bepaalde grenswaarde bereiken.

- b** Onderzoek of de wereldbevolking volgens dit model in 2050 minder dan 10% van deze grenswaarde verwijderd zal zijn.

naar: examen 2004 - I

Ontwikkeling van de wereldbevolking, onderverdeeld in acht regio's

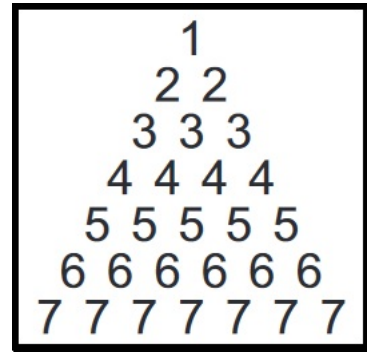


Figuur 11

Opgave 15: Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt (zie de figuur).

Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Bekijk de tekening.



Figuur 12



Figuur 13

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.

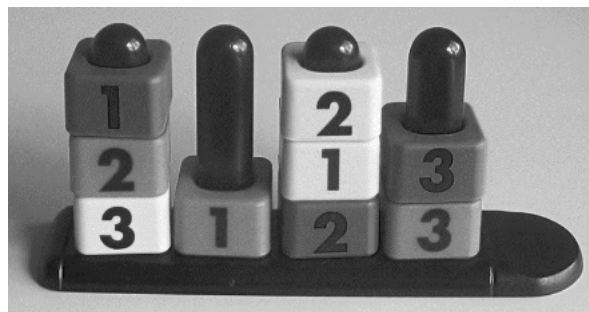
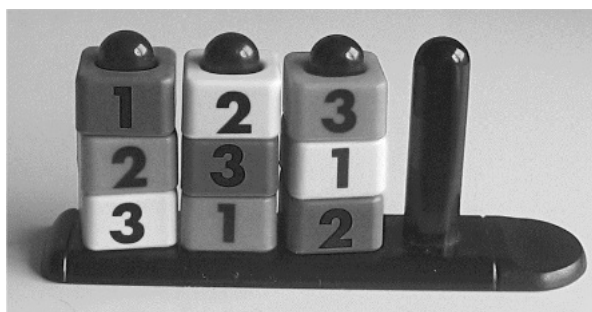
bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2013, tweede tijdvak

Opgave 16: Number Rumba

Het spel Number Rumba kan gespeeld worden met één of twee spelers. Iedere speler heeft een standaard voor zich met vier staven. Verder heeft elke speler 9 verschillende blokjes: 3 blauwe, 3 rode en 3 gele, waarbij de blokjes van elke kleur genummerd zijn van 1 tot en met 3.

Het doel van het spel is om de opstelling van de blokjes op de standaard vanuit een beginopstelling zo snel mogelijk te veranderen in de opstelling die op een opdrachtkaart staat. Hierbij wordt er steeds één blokje verplaatst en mogen niet meer dan drie blokjes tegelijk op een staaf staan.

Bekijk de twee figuren met de twee mogelijke opstellingen tijdens het spel.



Figuur 14

Tijdens het spel kan iedere mogelijke opstelling met de negen blokjes op de vier staven ontstaan. Onderzoek hoeveel opstellingen er in dit spel in totaal mogelijk zijn met de negen blokjes op de vier staven.

naar: pilotexamen vwo wiskunde A in 2015, eerste tijdvak

6 Naar het examen

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie voor het **vwo-examen wiskunde A** herhaald. Het is tijd om een compleet beeld van een vwo A examen te krijgen door er één te maken.

1. Bij 'Standaardfuncties': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken'.
2. Bij 'Vergelijkingen en ongelijkheden': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken'.
3. Bij 'Formules opstellen': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken'.
4. Bij 'Differentiaalrekening': hoort de theorie uit de domeinen 'Functies en grafieken' en 'Differentiaalrekening'.
5. Bij 'Discrete wiskunde': hoort alle theorie uit **Tellen** en **Rijen**.

Omdat het schriftelijk eindexamen de helft van je totale eindcijfer is, wil je een zo goed mogelijk examen doen. Enkele tips kunnen je daarbij helpen.

10 tips voor het eindexamen wiskunde

1. Vooraf

Je moet vooraf je kennis goed en in samenhang hebben opgebouwd, maar ook gericht examentraining hebben gedaan. Zorg dat je in de examenperiode goed bent uitgerust...

2. Spullen mee

Neem alle benodigde spullen mee: pen, potlood en gum, passer, geodriehoek en grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat je grafische rekenmachine is opgeladen of neem extra batterijen mee. Je moet op het examen met pen schrijven, tekenen mag met potlood.

3. Goed beginnen

Begin niet overhaast meteen met de eerste opdracht, maar bekijk eerst het hele examen. Misschien zijn er opgaven waarvan het onderwerp je direct aanspreekt, of waarvan je de bijbehorende wiskunde goed beheerst. Dan begin je daar wellicht liever mee.

Bedenk wel dat vaak de eerste opgave een soort van 'binnenkomer' is. Maar hij kan over iets gaan waar jij nu net niet zoveel van weet.

4. Contexten

Het examen bestaat uit een aantal contexten die elk een eigen titel hebben. De verschillende opdrachten zijn doorgenummerd met 1, 2, 3, ... t/m het laatste nummer. Dus binnen een bepaalde context is de eerste opdracht niet altijd nummer 1. Bekijk zo'n context eerst als geheel, begin niet meteen aan de opdrachten. Markeer **trefwoorden** en **belangrijke formules**. Bijvoorbeeld de gebruikte eenheden kun je maar beter even markeren.

5. De opdrachten

Begin pas met de eerste opdracht binnen een context als je ook echt begrijpt wat er van je gevraagd wordt.

Bij iedere examenvraag staat aangegeven hoeveel punten je voor deze opdracht kunt krijgen. Het aantal punten geeft je een idee uit hoeveel stappen jouw uitwerking moet bestaan. Zorg dat de uitwerking van een opdracht zoveel mogelijk op één pagina staat, dan krijg je geen overschrijffouten bij het doorwerken op de volgende bladzijde.

6. Grafische rekenmachine gebruiken

Bekijk goed of je gebruik kunt maken van de grafische rekenmachine (GR). Bij vwo wiskunde A mag je vaak met je GR een vergelijking oplossen. Schrijf dan duidelijk op hoe je de GR hebt ingezet. Bijvoorbeeld de ingevoerde formules en het ingestelde venster. Schrijf ook de functies die je gebruikt om snijpunten, maxima/minima te bepalen.

LET OP: Als er staat "Bereken exact..." of "Bereken algebraïsch..." mag je je GR alleen gebruiken voor eventuele afgeronde eindantwoorden, niet voor tussentijdse bewerkingen.

7. **Bijlagen gebruiken**

Veel wiskunde examens bevatten één of meer uitwerkbijlagen met een tabel, een grafiek of een andere (meetkundige) figuur. Als je daar iets uit moet aflezen, geef dit dan op de uitwerkbijlage aan. Bij aflezen uit een tabel kun je de afgelezen waarde markeren. Bij aflezen uit een grafiek teken je stippellijnen evenwijdig aan de assen. Zo verlies je geen punten bij het werken met een uitwerkbijlage.

8. **Opdracht klaar?**

Heb je een opdracht klaar, lees dan de vraag dan nog eens. Ga na of je wel antwoord hebt gegeven op de vraag, of je goed hebt afgerond en of je de juiste eenheid hebt vermeld.

9. **Even geen idee?**

Als je bij een opdracht niet weet wat je moet doen, blijf er dan niet te lang over nadenken. Geef jezelf even de tijd om iets te proberen en als dat niet helpt, ga dan door naar het vervolg. Anders kom je in tijdnood.

10. **Klaar?**

Als je door het examen heen heb gewerkt, ga dan niet meteen weg, maar neem even een paar minuten rust. Gebruik de resterende de tijd om te bekijken of je nog wat kunt aanvullen of verbeteren, loop alles nog een keer langs. Je zult zien dat je er nog fouten uithaalt. Maar bedenk wel: bij twijfel kun je meestal het best je eerste antwoord laten staan!

Examen

Opgave 1: Zonnepanelen



Zonnepanelen gebaseerd op gegevens uit 2013

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepaneleninstallatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Verder wordt er op de website gerekend met een elektriciteitsprijs van € 0,225 per kWh voor het eerste jaar na de aanschaf van de zonnepanelen en vervolgens met een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.

Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen.

Met behulp van deze gegevens is het mogelijk een formule op te stellen van de vorm $Z = a \cdot b^{t-1}$ met Z de opbrengst in euro's van de zonnepanelen in jaar t . Hierbij is $t = 0$ het moment van aanschaf van zonnepanelen.

- a** Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een vaste prijs van € 0,225 per kWh. In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

- b** Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

Als je de panelen zelf installeert, is de aanschafprijs lager. De aanbieder rekent dan € 1300 vaste kosten voor het systeem en € 325 per paneel. De elektriciteitsopbrengst van de panelen verandert niet bij een doe-het-zelfsysteem.

Als je 10 of meer panelen koopt, is de overheidssubsidie € 650. Voor T , de terugverdientijd in jaren, heeft de aanbieder de volgende formule opgesteld:

$$T = \frac{650 + 325x}{46,9x}$$

met x het aantal panelen dat aangeschaft wordt en $x \geq 10$.

- c** Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide van T voor $x \geq 10$ dat de terugverdientijd daalt als je meer panelen aanschaft.

Voor de aanschaf van 9 panelen of minder van een doe-het-zelfsysteem geldt een andere formule omdat de overheidssubsidie dan 15% van de aanschafprijs is. De aanschafprijs bestaat uit de vaste kosten plus de kosten per paneel.

- d** Stel een formule op voor de terugverdientijd T in jaren en x het aantal zonnepanelen voor $x \leq 9$.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 1

Opgave 2: Eén miljard hartslagen

Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. We gaan dat in deze opgave onderzoeken.

Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kun je dan de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

- a** Bereken zo de gemiddelde levensduur in jaren van dit hondenras.

Naar aanleiding van deze bewering kan een formule voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting opgesteld worden:

$$H = \frac{1900}{L}$$

Hier is L de levensverwachting (in jaren) en H de hartslag (in slagen per minuut).

- b** Toon aan dat deze formule uit de veelgehoorde bewering volgt.
- c** Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is.

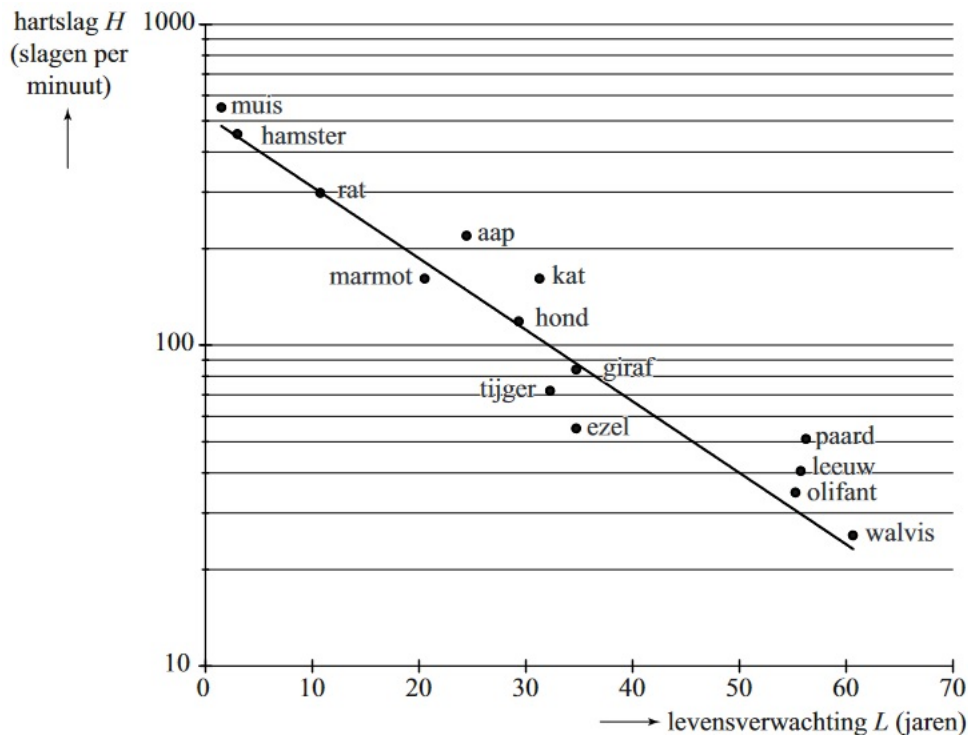
Bij controle blijkt dat er dieren zijn waarvoor de formule ongeveer klopt, maar ook dieren waar de formule helemaal niet voor klopt, zoals de aap en de muis. In werkelijkheid is het verband anders. In de figuur is de hartslag van een aantal soorten zoogdieren uitgezet tegen hun levensverwachting. Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

De punten die de hamster en de walvis weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn. De walvis heeft een levensverwachting van 60 jaar en een hartslag van 25 slagen per minuut. De hamster heeft een levensverwachting van 3 jaar en een hartslag van 450 slagen per minuut. Het verband tussen H (de hartslag in slagen per minuut) en L (de levensverwachting in jaren) is (bij benadering) exponentieel en is dus te schrijven als:

$$H = b \cdot g^L$$

Uit de grafiek volgt dat b bij benadering 520 is en g bij benadering 0,95.

- d** Bereken met behulp van de gegevens van de hamster en de walvis g in drie decimalen en b in gehelen.



Met de formule $H = 520 \cdot 0,95^L$ kun je de hartslag berekenen als je de levensverwachting weet. Logischer is het om de levensverwachting te berekenen als je van een zoogdier de hartslag gemeten hebt.

Daarom willen we de formule $H = 520 \cdot 0,95^L$ herleiden tot de vorm:

$$L = a \cdot \log(H) + b$$

- e Voer deze herleiding uit. Geef a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 2

Opgave 3: De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2 . De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42195 meter, de marathon.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

- a Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10000 meter.
Als je voor d_1 en d_2 de afstanden in een andere eenheid dan meters zou invullen, dan geeft de formule dezelfde uitkomst.
- b Leg zonder getallenvoorbeeld uit waarom de uitkomst die de formule geeft inderdaad niet verandert als je de beide afstanden in kilometers in plaats van meters invult.
Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.
- c Bereken dit percentage.

Een andere maat voor de snelheid is de kilometertijd K , het aantal seconden dat een hardloper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Als we naar de wereldrecords op de langere loopafstanden kijken, dan blijken de kilometertijden heel goed te voorspellen te zijn met de formule van Riegel. Dat is opmerkelijk want die afstanden werden door verschillende hardlopers gelopen. Het wereldrecord op de 1500 meter is (in 2017 nog) precies 3 minuten en 26 seconden. Uitgaande van dit wereldrecord kunnen de tijden voor de wereldrecords op de andere afstanden met behulp van de formule van Riegel berekend worden met $T = 206\left(\frac{d}{1,5}\right)^{1,07}$. In deze formule is T de gelopen tijd in seconden voor het wereldrecord op de afstand d km.

Met behulp van deze formule en de formule $K = \frac{T}{d}$ is het mogelijk een formule op te stellen voor de kilometertijden van de wereldrecords in de vorm:

$$K = p \cdot d^q$$

Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

- d** Bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Een variant van de formule van Riegel met een nog onbekende exponent a kan ook gebruikt worden bij schaatsen. Die formule ziet er dan als volgt uit:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^a \quad (\text{met de tijden in seconden en de afstanden in meters})$$

Een schaatsliefhebber gebruikte eind 2015 de wereldrecords op de 5000 meter en de 10000 meter om de waarde van de exponent a te berekenen.

Op de 5000 meter was eind 2015 het wereldrecord 6 minuten en 3,32 seconden. Het wereldrecord op de 10000 meter was op dat moment 12 minuten en 36,30 seconden.

- e** Bereken de waarde van a in drie decimalen nauwkeurig op basis van deze twee wereldrecords.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 3

Opgave 4: Zentrum Paul Klee

Op de foto's zie je het Zentrum Paul Klee in Zwitserland. Het gebouw heeft een bijzondere vorm: het bestaat uit drie afdelingen met daaroverheen een golvend dak.

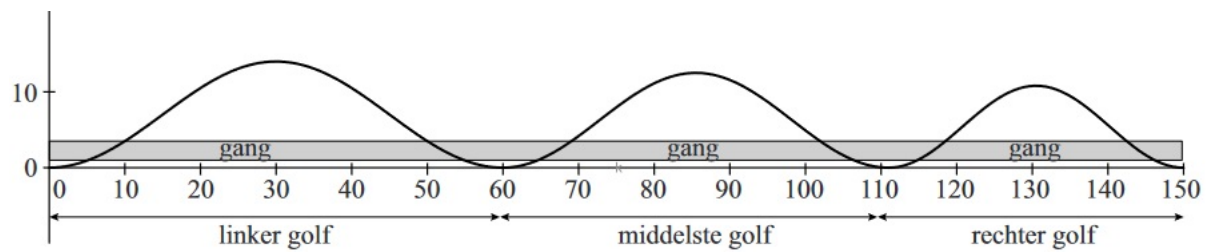


De drie afdelingen zijn verbonden door een lange gang. In figuur 1 zie je een schematische doorsnede van het gebouw en de lange gang. In deze figuur is duidelijk te zien dat het dak bestaat uit drie golven met verschillende periodes. Ook de hoogtes zijn verschillend.

Elke golf begint en eindigt op een laagste punt. Voor de linker golf in de figuur kan men de volgende formule opstellen:

$$h = 7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right)$$

Hierin is h de hoogte van de golf boven het laagste punt in meter en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van deze golf.



figuur 1

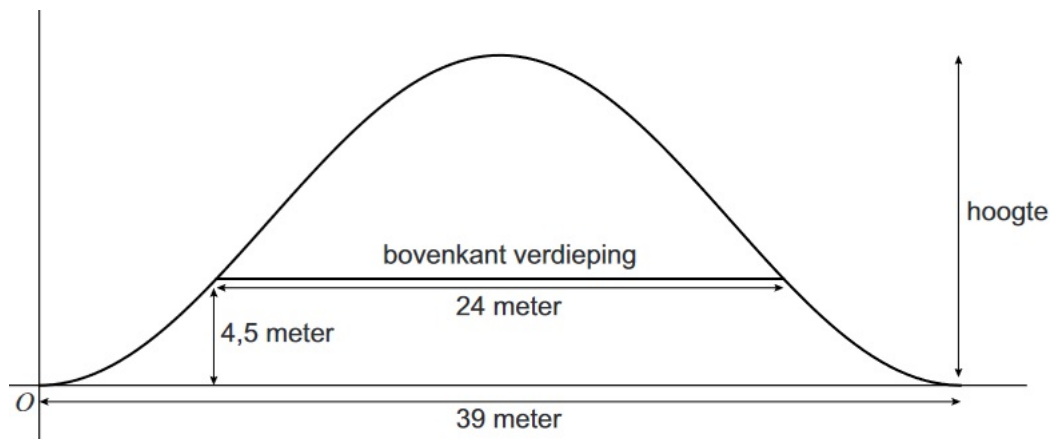
De vloer van de gang bevindt zich 1 meter boven het laagste punt van de golven. De gang zelf is 3,5 meter hoog.

- a** Bereken de lengte van het gedeelte van de gang dat zich geheel onder het linker dak, dus onder de linker golf, bevindt in cm nauwkeurig.

De golf die hoort bij het middelste dak is 51 meter lang en 12,5 meter hoog. Hier hoort een formule bij van de vorm $h = a + a \sin(c(x - d))$ met h de hoogte van de golf in meter boven het laagste punt en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van de linker golf.

- b** Bereken de waarden van a , c en d in deze formule.

We kijken nu naar het rechter dak. Om de afmetingen hiervan te berekenen, kan de architect bijvoorbeeld als volgt te werk gaan. Hij gaat voor het dak uit van een sinusöide met een periode van 39 meter. Verder wil hij dat onder het dak een benedenverdieping past van 24 meter breed en 4,5 meter hoog. In figuur 2 is de doorsnede getekend die bij deze situatie hoort. De golf begint linksonder in het punt met coördinaten $(0,0)$.



figuur 2

- c** Bereken welke hoogte de architect nu minimaal moet nemen voor de golf die hoort bij het dak in deze situatie. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 4

Opgave 5: Pi in het oude India

In de 14^e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

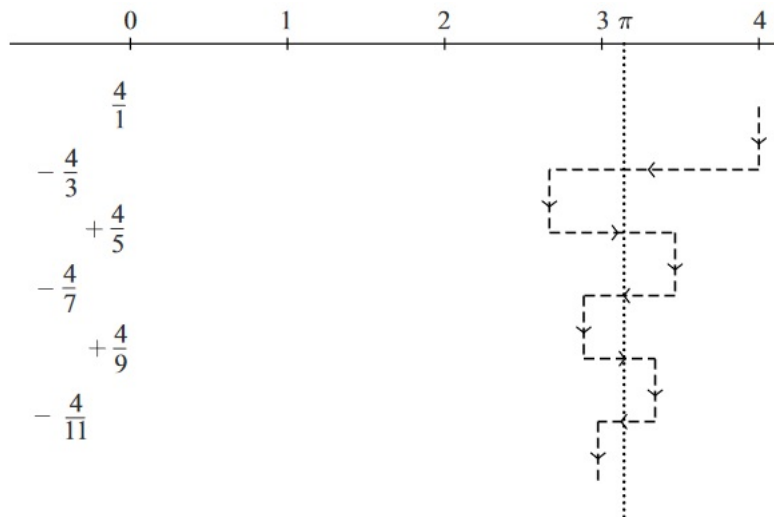
Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π .

Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal π . Bekijk de figuur.



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π . Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- a** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{5}; -\frac{4}{7}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{11}; \dots$

De directe formule voor deze rij is van de vorm $u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot (n-1) + 1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

- b** Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.

Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort

- c Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 5

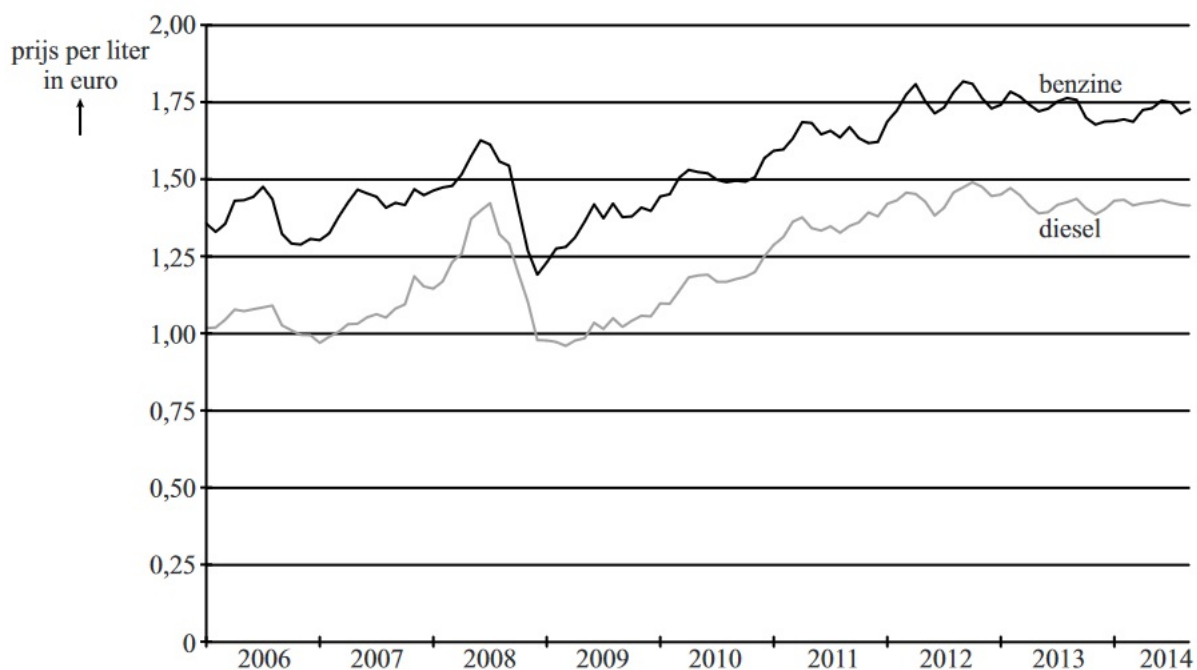
Opgave 6: Benzine of diesel?

Peter is van plan binnenkort een andere auto aan te schaffen. Hij heeft zijn keuze laten vallen op een Volvo V70 uit 2015, maar twijfelt tussen twee uitvoeringen van deze auto, de **Nordic** en de **Nomadic**. Zie tabel 1.

uitvoering	brandstof	gewicht (kg)	verbruik (liter per 100 km)
Nordic	benzine	1595	6,4
Nomadic	diesel	1655	4,5

tabel 1

De Nordic rijdt op benzine, terwijl de Nomadic op diesel rijdt. Het voordeel van een auto die op diesel rijdt, is dat die auto een stuk zuiniger is: niet alleen kan een dieselauto meer kilometers per liter brandstof rijden, diesel is ook nog eens een stuk goedkoper dan benzine. Zie de figuur.



In de figuur is duidelijk te zien dat de prijzen voor brandstof sinds 2012 redelijk stabiel zijn. Op het moment dat Peter over zijn auto-aanschaf nadenkt, is de verwachting dat dit in de toekomst zo zal blijven.

Het nadeel van auto's op diesel is dat de wegenbelasting voor deze auto's veel hoger is dan die voor auto's die op benzine rijden. Zie tabel 2.

wegenbelasting per 3 maanden			
gewichtsklasse	benzine	diesel	aardgas
1451 - 1550	€ 218	€ 406	€ 318
1551 - 1650	€ 242	€ 442	€ 355
1651 - 1750	€ 265	€ 478	€ 393

tabel 2

Peter gaat ervan uit dat de overige kosten, zoals verzekering en onderhoud, bij beide uitvoeringen gelijk zullen zijn. Peter houdt in de vergelijking geen rekening met het eventuele verschil in aanschafkosten tussen beide uitvoeringen.

Omdat rijden op diesel voordeliger is dan rijden op benzine, zal de dieseluitvoering vanaf een bepaald aantal kilometers per jaar voordeliger zijn dan de benzine-uitvoering.

Onderzoek met behulp van de gegevens vanaf welk aantal kilometers per jaar de dieseluitvoering voordeliger zal zijn dan de benzine-uitvoering. Rond je antwoord af op honderden kilometers.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 6

1 Standaardfuncties

- V1** Eerst reken je de hoeveelheid gas die moet worden opgeslagen om naar m^3 : $1,3 \text{ Mm}^3 = 1,3 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Bereken dan hoeveel m^3 gas er in iedere bol moet worden opgeslagen. Als er honderd tanks zijn, moet er $\frac{1,3 \cdot 10^6}{100} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ m}^3$ gas in elke tank worden opgeslagen. Aangezien de tanks bolvormig zijn, stel je de gevonden hoeveelheid gelijk aan de inhoud I . Daarmee kun je de straal r bepalen.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,3 \cdot 10^4$$

$$r^3 = 1,3 \cdot 10^4 \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{3103,521\dots} \approx 14,59 \text{ m}$$

- 1 a** Snijpunt x -as: $-2x - 2 = 0$ geeft $x = -1$ en dus $(-1, 0)$.
Snijpunt y -as: $x = 0$ geeft $y = -2$ en dus $(0, -2)$.
- b** $y_1 = 2(x^2 - 2x) - 6 = 2((x - 1)^2 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 8$.
- c** Uit $y = 2(x - 1)^2 - 8$ lees je de coördinaten van de top af: $(1, -8)$.
Omdat voor het kwadraat een positief getal staat, is dit een dalparabool.
- d** Snijpunt met de y -as: $x = 0$ geeft $y = -6$, dus $(0, -6)$.
Snijpunten met de x -as: $2(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 3)(x + 1) = 0$ geeft $x = 3 \vee x = -1$.
Dus $(3, 0)$ en $(-1, 0)$.
Eventueel mag dit met de GR, want er staat niet dat het algebraïsch moet.
- 2 a** $10 \cdot x^3 = 2 \cdot x^4$ geeft $10 \cdot x^3 - 2x^4 = 2x^3(5 - x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 5$.
Dus $(0, 0)$ en $(5, 1250)$.
Of met de GR:
Voer in $y_1 = 10 \cdot x^3$ en $y_2 = 2 \cdot x^4$ met venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ bij $-10 \leq y \leq 1500$.
Snijpunten $(0, 0)$ en $(5, 1250)$.
- b** Alleen g heeft een top: $(0, 0)$.
- c** Van f is het bereik $\mathbb{R}$ (elke uitkomst komt voor).
De grafiek van g heeft een minimum van 0, dus het bereik is $y \geq 0$.
- 3 a** Voor het domein van f geldt $x \geq 0$.
Voor het domein van g geldt $x > 0$.
GR: $y_1 = 3\sqrt{x}$ en $y_2 = \frac{2}{\sqrt{x}}$ met venster $-1 \leq x \leq 5$ bij $-1 \leq y \leq 10$.
- b** $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.
- c** f is r.e. en g is o.e. met $\sqrt{x}$.
- d** $3\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ geeft $3(\sqrt{x})^2 = 2$ en $x = \frac{2}{3}$.
Het snijpunt is $\left(\frac{2}{3}, 3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
- e** Het beginpunt van $f(x) = -2\sqrt{x}$ is te vinden door de vergelijking $x = 0$ op te lossen.
 $x = 0$ en $y = -2\sqrt{0} = 0$, dit geeft $(0, 0)$.

Het beginpunt van $g(x) = \sqrt{-2x}$ is te vinden door de vergelijking $-2x = 0$ op te lossen.
 $x = 0$ en $y = \sqrt{-2 \cdot 0} = 0$, dit geeft $(0,0)$.

- 4 a** Er is dan in beide gevallen sprake van asymptotisch gedrag. Beide functies hebben een verticale asymptoot $x = 0$, want als je positieve getallen heel dicht in de buurt van 0 (zoals 0,1 en 0,001) invult krijg je grote y -waarden. Vul je negatieve getallen heel dicht bij 0 in, dan worden de functiewaarden van f heel erg negatief, maar die van g worden heel groot positief.

- b** De grafieken van f en g hebben bij hele grote x -waarden uitkomsten die steeds dichterbij $y = 0$ komen. $y = 0$ is de horizontale asymptoot van hun grafieken.

De grafieken van f en g hebben bij heel erg negatieve x -waarden ook uitkomsten die steeds dichterbij $y = 0$ komen. Weer is $y = 0$ de horizontale asymptoot van hun grafieken. Alleen blijven de functiewaarden van f onder de x -as, terwijl die van g boven de x -as blijven.

c $h(x) = \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{12x}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{12x+4}{x^2}$

d $h(x) = \frac{\frac{12}{x}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{12x}{x^2}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{12x}{4} = 3x$

Dit kun je alleen doen zolang $x \neq 0$, want als $x = 0$ hebben f en g geen functiewaarde.

- 5 a** $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$ geeft $4\pi r^3 - 12\pi r^2 = 4\pi r^2(r - 3) = 0$ en dus $r = 0 \vee r = 3$.

Bij een straal van 3 eenheden hebben volume en oppervlakte dezelfde waarde.

b Uit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ volgt $r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot V$ en $r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$.

Dit invullen in $A = 4\pi r^2$ geeft $A = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}} = (36\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$.

Dus $c = (36\pi)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$ en $p = \frac{2}{3}$.

- 6 a** $H = 5200 \cdot 1,003^t$ waarin t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000.

- b** Als t negatieve waarden heeft (je gaat dan terug in de tijd) dan nadert H naar 0.

- c** De verdubbelingstijd kun je vinden met de GR en een tabel: 231 jaar.

De verdubbelingstijd kun je vinden uit $1,003^t = 2$. Om dit op te lossen kun je de GR gebruiken of met logaritmen werken.

- 7 a** $H = 14000 \cdot 0,988^t$ waarin t de tijd in dagen.

- b** Als t groot wordt, dan nadert H naar 0.

- c** De halveringstijd kun je vinden met de GR en een tabel: 57 jaar.

De halveringstijd kun je vinden uit $0,988^t = 0,5$. Om dit op te lossen kun je de GR gebruiken of met logaritmen werken.

- 8 a** Door $(1,0)$ want $^g\log(1) = 0$.

- b** De y -as $x = 0$.

- c** Voor $0 < g < 1$.

- 9 a** De groeifactor is $e \approx 2,72$ en het groeipercentage is ongeveer 172 %.

- b** De grafiek wordt een rechte lijn door bijvoorbeeld $(0,40)$ en $(5,40e^5) \approx (5,5937)$.

c $q = 40 \cdot e^p$ geeft $e^p = \frac{1}{40}q$ en $p = \ln\left(\frac{1}{40}q\right)$.

Dus $c = 1$ en $d = \frac{1}{40}$.

- 10** $K(1) = K(10^0) = 200 \cdot 1^{0,914} = 200$ en dan klopt met het beginpunt.

$K(6 \cdot 10^2) = 200 \cdot (6 \cdot 10^2)^{0,914} \approx 69225 \approx 7 \cdot 10^4$ en dat klopt met het punt (600,70000).

- 11 a** Kwadraat afsplitsen $f(x) = 2x^2 + 4x + 4 = 2(x+1)^2 + 2$.
- b** Eerst verschuiving van 1 naar links, dan verticale herschaling met factor 2 en tenslotte verschuiving van 2 naar boven.
- c** De top van de standaardfunctie doorloopt de transformaties bij b.
Top $(-1, 2)$.
- 12 a** $T(t) = -14 \cdot e^{-0,05t} + 20$
Eerst horizontale herschaling met factor $\frac{1}{-0,05} = -20$, dan verticale herschaling met factor -14 en tenslotte verschuiving van 20 naar boven.
- b** De asymptoot van de standaardfunctie doorloopt de transformaties bij b.
Horizontale asymptoot $T = 20$.
- 13 a** $L = -10 \log(20R) + 80$
Eerst horizontale herschaling met factor $\frac{1}{20} = 0,05$, dan verticale herschaling met factor -10 en tenslotte verticale verschuiving van 80 naar boven.
- b** De asymptoot van de standaardfunctie doorloopt de transformaties bij b.
Verticale asymptoot $R = 0$.
- 14 a** Periode: 1 uur, amplitude: 20 cm, evenwichtsstand: $h = 190$ cm.
- b** Periode: 12 uur, amplitude: 12 cm, evenwichtsstand: $h = 190$ cm.
- 15 a** Eerst verschuiving van 1 naar rechts, dan horizontale herschaling met factor $\frac{1}{\pi}$, vervolgens verticale herschaling met factor 2 en tenslotte verticale verschuiving van 3 naar boven.
- b** Periode: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, amplitude 2 en evenwichtsstand $y = 3$.
- 16 a** Omdat w de waarde van het aandelenkapitaal is, moet $w \geq 0$.
- b** De totale stijging van de waarde van de aandelen bedraagt: $150 \cdot (21,44 - 19,18) = 339,00$ euro.
De kosten van de aankoop zijn $4 + 150 \cdot 0,0045 \cdot 19,18 \approx 16,95$ euro.
De kosten van de verkoop zijn $4 + 150 \cdot 0,0045 \cdot 21,44 \approx 18,47$ euro.
De winst bedraagt $339 - 16,95 - 18,47 = 303,58$ euro.
- c** $0,004 \cdot w + 7 = 46$ geeft $0,004 \cdot w = 39$ en $w = \frac{39}{0,004} = 9750$.
Dus een totale waarde van 9750 euro.
Of gebruik je GR met $y_1 = 0,004 \cdot x + 7$ en $y_2 = 46$ en venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10000$ bij $-10 \leq y \leq 50$.
Snijpunt $x = 9750$ en $y = 46$, dus het antwoord is € 9750,00.
- 17 a** De nieuwe diameter is 0,32 m.
 $d = 0,16$ invullen geeft 0,410 en $d = 0,32$ invullen geeft 0,376.
Dat is een afname van $\frac{0,376 - 0,410}{0,410} \approx 8\%$.
- b** Los de vergelijking $40 = 44 \cdot d^{0,65}$ algebraïsch of met de GR op:
 $40 = 44 \cdot d^{0,65}$ geeft $d^{0,65} = \frac{40}{44}$ en $d = \left(\frac{40}{44}\right)^{\frac{1}{0,65}} \approx 0,86$.
Of:
GR: $y_1 = 44 \cdot d^{0,65}$ en $y_2 = 40$ met venster $-5 \leq x \leq 5$ bij $-10 \leq y \leq 50$.
Dit geeft: $x \approx 0,863$ en $y = 40$, dus de bijbehorende diameter is 0,86 m.
De bijbehorende vormfactor is $f = 0,30 \cdot 0,86^2 - 0,36 \cdot 0,86 + 0,46 = 0,37$.
De hoogte is $h = 40$, dus het volume aan hout is $V = 0,37 \cdot 0,86^2 \cdot 40 = 11 \text{ m}^3$.

- c** $V = f \cdot d^2 \cdot h$ en de formules voor f en h invullen geeft:
 $V = (0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0,65} = 0,30 \cdot 44 \cdot d^{4,65} - 0,36 \cdot 44 \cdot d^{3,65} \cdot d + 0,46 \cdot 44 \cdot d^{2,65}$.
 Dus $a = 13,20$, $b = -15,84$ en $c = 20,24$.
- 18** $N_{\max} = 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 0,794^L = 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 2^{2 \log(0,794) \cdot L} \approx 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 2^{-0,333 \cdot L}$
 Horizontale herschaling met factor $\frac{1}{2 \log(0,794)} \approx -3$ en verticale herschaling met factor $2,512 \cdot 10^{12}$.
- 19 a** De groeifactor in drie dagen is 10, dus de groeifactor per dag is $10^{\frac{1}{3}} \approx 2,2$. Dit is meer dan verdubbeling.
- b** De bederfgrens in de oude situatie: $100 \cdot 8,3^t = 50 \cdot 10^6$ geeft met de GR: $t \approx 6,2$.
 Het duurt (ongeveer) 1 dag langer
- c** Als $T = 18^\circ\text{C}$ is $g = 10^{0,0092 \cdot (18+6)^2} \approx 199159$.
 Na een dag is het aantal bacteriën 19915900 en dit is nog onder de bederfgrens.
- 20 a** Op 30 januari geldt: $n = 30$ en dan geldt: $B \approx 8,814$.
 De bezonning is dan 8 uur en $(0,814 \cdot 60 =)$ 49 minuten.
 Het antwoord is 8:27 + 8:49 en dat is 17:16 uur.
- b** Op 13 april geldt: $n = 103$ en $B(103) > 14,07$ en $B(102) < 13,9994$.
- c** Het maximum van B is volgens de formule $12,3 + 4,6$.
 Het minimum van B is volgens de formule $12,3 - 4,6$.
 Het verschil in bezonning is daarmee 9,2 uur en dat is 9 uur en $(0,2 \cdot 60 =)$ 12 minuten.

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

V1 Neem x het aantal speakers dat ingezet wordt. Dan geldt:

$$L_d B = 10 \log \left(\frac{x I_s}{I_0} \right) \leq 103$$

Oplossen kan met de GR of algebraïsch:

$$10 \log \left(\frac{x I_s}{I_0} \right) = 103 \text{ geeft } x \frac{I_s}{I_0} = 10^{10,3}$$

$$\text{Dus } x = 10^{10,3} \cdot \frac{I_0}{I_s} = 10^{10,3} \cdot \frac{10^{-12}}{0,0017} \approx 11,7$$

Je rondt hier naar beneden af omdat anders toch de grens van 103 dB wordt overschreden. Er mogen dus maximaal 11 speakers gebruikt worden.

1 a $2x - 3 = 3x + 4$ geeft $-x = 7$ en $x = -7$.

GR: $y_1 = 2x - 3$ en $y_2 = 3x + 4$ met standaardvenster.

Oplossing ongelijkheid: $x > -7$.

b $\frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{5}x + 4$ geeft $5x + 100 = 4x + 80$ en dus $x = -20$.

c $x(x + 4) = -3$ geeft $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1) = 0$ en dus $x = -3 \vee x = -1$.

$y_1 = x(x + 4)$ is een dalparabool, dus $-3 < x < -1$.

d $x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 4$.

GR: $y_1 = x^3 - 4x^2$ geeft $x < 4$.

2 a GR: $y_1 = x^2 - 2x$ en $y_2 = -2x^2 + 4x$ met standaardvenster.

Snijpunten: $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x = 2$ en $y = 0$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < 0 \vee x > 2$.

b GR: $y_1 = x^3$ en $y_2 = 5 - x$ met standaardvenster.

Snijpunt: $x \approx 1,52$ en $y \approx 3,48$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < 1,52$.

3 a GR: $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 11$ met standaardvenster.

Snijpunt: $x = 1,765$ en $y = 11$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x \leq 1,765$.

b GR: $y_1 = 3x^4$ en $y_2 = 12$ met standaardvenster.

Snijpunten: $x \approx -1,414$ en $y = 12$ en ook $x \approx 1,414$ en $y = 12$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < -1,414 \vee x > 1,414$.

c GR: $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 3x^4$ met standaardvenster.

Snijpunten $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x \approx 0,667$ en $y \approx 0,593$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $0 < x < 0,667$.

4 a $x^{\frac{4}{3}} = 17$ betekent $x = \pm 17^{\frac{3}{4}} \approx \pm 8,372$ (macht is even).

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $-8,372 < x < 8,372$.

b $\sqrt[4]{x^3} = 8$ geeft $x^3 = 8^4 = 4096$ en $x = 4096^{\frac{1}{3}} = 16$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x \geq 16$.

5 a $x^{-2} = 17$ betekent $x = \pm 17^{-\frac{1}{2}} \approx \pm 0,243$ (macht is even).

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < -0,243 \vee x > 0,243$.

b $\frac{30}{x-3} = 5$ geeft $30 = 5(x - 3)$ en $x - 3 = 6$, zodat $x = 9$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $3 \leq x < 9$.

6 a $2^{2x-1} = 32 = 2^5$ geeft $2x - 1 = 5$ en $x = 3$.

Of:

$2^{2x-1} = 32$ geeft $2x - 1 = {}^2\log(32) = 5$ en $x = 3$.

b $8^x = 10^x$ geeft $\frac{8^x}{10^x} = 1$ en $0,8^x = 1$, dus $x = 0$.

Of:

$2^{3x} = 10^x$ geeft $3x = {}^2\log(10^x) = x \cdot {}^2\log(10)$ en $x = 0$.

c $150 \cdot 10^{-0,1x} = 60$ geeft $10^{-0,1x} = 0,4$, dus $-0,1x = \log(0,4)$ en $x = \frac{\log(0,4)}{-0,1} \approx 3,98$.

d $50e^{0,05x} + 10 = 100$ geeft $e^{0,05x} = \frac{90}{50} = 1,8$ en $0,05x = \ln(1,8)$, zodat $x = \frac{\ln(1,8)}{0,05} \approx 11,76$.

7 De groeifactor per jaar is $g = 1,3$.

$1,3^t = 2$ geeft $t = {}^1,3\log(2) \approx 2,6$.

De verdubbelingstijd is ongeveer 2,6 jaar.

8 a ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$ geeft $\frac{1}{2}x + 3 = 2^5 = 32$ en $x = 58$.

b $\log(4 - x) = 2$ geeft $4 - x = 10^2 = 100$ en $x = -96$.

9 a $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t = 300$ geeft $540 \cdot 0,95^t = 240$ en $0,95^t = \frac{240}{540}$.

Dus $t = {}^{0,95}\log\left(\frac{240}{540}\right) \approx 15,8$ minuten.

b Dit is geen exponentiële groei. Alleen het verschil met 540 neemt exponentieel af.

10 a $h = -19\log(p) + 57 = 0$ geeft $\log(p) = \frac{57}{19}$ en $p = 10^{\frac{57}{19}} = 1000$ hPa .

b $h = -19\log(p) + 57 = 2$ geeft $\log(p) = \frac{55}{19}$ en $p = 10^{\frac{55}{19}} \approx 785$ hPa .

11 a Periode $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$, amplitude 3 en evenwichtsstand $y = 2$.

GR: $y_1 = 2 + 3\sin(2\pi(x - 1))$ met venster $0 \leq x \leq 2$ bij $-1 \leq y \leq 5$.

b Dat gaat zo:

$2 + 3\sin(2\pi(x - 1)) = 3,5$

$3\sin(2\pi(x - 1)) = 1,5$

$\sin(2\pi(x - 1)) = 0,5$

$2\pi(x - 1) \approx 0,524 + k \cdot 2\pi \vee 2\pi(x - 1) \approx 2,618 + k \cdot 2\pi$

$x - 1 \approx 0,083 + k \cdot 1 \vee x - 1 \approx 0,417 + k \cdot 1$

$x \approx 1,083 + k \cdot 1 \vee x \approx 1,417 + k \cdot 1$

beide zijden -2
beide zijden : 3
terugrekenen met arcsin
beide zijden delen door 2π
beide zijden $+1$

De grafiek geeft als oplossing $0,083 < x < 0,417 \vee 1,083 < x < 1,417$.

12 a De helling tussen (134,65) en (210,46) is $\frac{46-65}{210-134} = -0,25$.

Dus $a = 65 + (180 - 134) \cdot -0,25 = 53,5$.

b De helling tussen (210,46) en (240,31) is $\frac{31-46}{240-210} = -0,5$.

De uitkomst bij b is 40, dat is $\frac{40-46}{-0,5} = 12$ eenheden verder dan 46.

Dus $b = 210 + 12 = 222$.

c De helling tussen (240,31) en (255,26) is $\frac{26-31}{255-240} = -\frac{1}{3}$.

Dus $c = 26 + (261 - 255) \cdot -\frac{1}{3} = 24$.

13 a Bij $x = 6$ hoort volgens de grafiek de waarde $y \approx 6,5$.

- b** Aflezen van de punten (4,3) en (7,8) geeft:

De helling tussen (4,3) en (7,8) is $\frac{8-3}{7-4} = \frac{5}{3}$.

Dus hoort bij $x = 6$ de waarde $y = 3 + (6 - 4) \cdot \frac{5}{3} = 6\frac{1}{3}$.

- c** Daarvoor is de grafiek te onvoorspelbaar, hij zou net zo goed heel anders door deze meetpunten kunnen lopen en hoe hij zich erbuiten zal gedragen is volkomen onbekend.

- 14 a** De voorspelling van 2019 kopiëren en die grafiek naar 2020 verplaatsen, maar dan wel ongeveer 2 ppm omhoog verschuiven.

- b** Elk jaar lijkt de maximale CO₂-concentratie met ruim 2 ppm toe te nemen.

Dus zou in 2021 de hoogste waarde ongeveer $415 + 2 \cdot 2 = 419$ ppm zijn.

- 15 a** $P(1895) = 185$ en $P(1995) = 219$.

Er zouden $219 - 185 = 34$ soorten zijn ontdekt.

- b** GR: $y_1 = \frac{264x-476657}{x-1767}$ en $y_1 = 200$ met venster bijvoorbeeld $-1800 \leq x \leq 2000$ bij $-10 \leq y \leq 300$.

Snijpunt bij $x = 1925,89...$ en $y = 200$.

In het jaar 1925 zijn er 200 nieuwe soorten ontdekt vanaf het jaar waar de uitkomst nul is.

Dat is als $264t - 476657 = 0$, dus $t = 1805$.

De betekenis is dat er in 1925 200 nieuwe soorten zijn ontdekt gerekend vanaf 1805.

- 16 a** De formule voor de Amerikaanse eik is: $h = 29,026(1 - 0,9790^t)^{0,80820}$.

Het vierde jaar begint op $t = 3$ en eindigt op $t = 4$. Dit betekent dat $t = 3$.

Het invullen van deze twee waarden geeft respectievelijk als hoogte (ongeveer) 305,5 cm en 382,2 cm.

De hoogtes van de zomereik zijn (ongeveer) 171,7 cm en 225,2 cm.

De toenames zijn (ongeveer) 77 cm en 54 cm, het verschil is ruim 20 cm.

- b** Los de vergelijking $8 = 23,743(1 - 0,9603^t)^{1,22770}$ op.

GR: $y_1 = 23,743(1 - 0,9603^t)^{1,22770}$ en $y_2 = 8$ met venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 20$ bij $-10 \leq y \leq 10$.

Snijpunt bij $x = 13,11...$ en $y = 8$. De boom is 13 jaar oud.

- 17 a** De groeifactor per jaar is $1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$.

De kosten in 2044 zijn $4700 \cdot (1,045)^{40} = 27337,00$ euro.

- b** De kosten voor levensonderhoud nemen toe tot (ongeveer) € 15500.

De groeifactor per 40 jaar is $\frac{15500}{4700} \approx 3,298$.

Dat betekent een toename van (ongeveer) 230%.

Of:

De groeifactor per jaar is 1,03.

De groeifactor per 40 jaar is $1,03^{40} \approx 3,262$.

Dat betekent een toename van (ongeveer) 226%.

- 18 a** $P_{\text{theoretisch}} = \frac{150}{12 \cdot 70^{0,667}} \approx 0,735$

En $0,735 = \frac{T}{12 \cdot 100^{0,667}}$ geeft $T = 0,735 \cdot 12 \cdot 100^{0,667} \approx 190,313$.

Het antwoord is (ongeveer) 190 kg.

- b** Er moet gelden: $\frac{T_A}{12 \cdot 50^{0,667}} = \frac{T_B}{12 \cdot 150^{0,667}}$.

Dit betekent: $T_B = \frac{12 \cdot 150^{0,667}}{12 \cdot 50^{0,667}} \cdot T_A \approx 2,08 \cdot T_A$.

Dus het gestelde is waar.

c Er moet gelden: $\frac{T}{408,15 - \frac{11047}{L^{0,9371}}} > \frac{T}{12 \cdot L^{0,667}}.$

GR: $y_1 = 408,15 - \frac{11047}{X^{0,9371}}$ en $y_2 = 12 \cdot X^{0,667}$ met venster bijvoorbeeld $50 \leq x \leq 150$ bij $-10 \leq y \leq 300$.

Snijpunten $x = 72,93..$ en $y = 209,786...$ en ook $x = 104,23..$ en $y = 266,18...$

De oplossingen zijn $L \approx 73$ en $L \approx 104$.

Uit de grafiek blijkt dat de formule van Siff een hogere waarde heeft voor de prestatie als $50 \leq L \leq 72$ of als $L \geq 105$.

19 a In 2002 waren er (ongeveer) 17000 nieuwbouwwoningen.

In 2004 waren er (ongeveer) 14800 nieuwbouwwoningen.

De toename is: $\frac{17000-14800}{14800} \approx 1,15$ dus ongeveer 15 % hoger.

b Twee keer zo duur betekent een kostprijs van 2 miljoen euro.

Aflezen dat bij 2 miljoen de controletijd ongeveer 76 uren is.

Dat is $\frac{76}{50} = 1,52$ dus ongeveer 1,5 keer zo groot.

c $C = (1,544 + 0,245 \log(50))^9 \approx 427$ uur.

d $C = (1,544 + 0,245 \log(K))^9 = 950$ geeft $1,544 + 0,245 \log(K) = 950^{\frac{1}{9}} \approx 2,142$.

Dus $\log(K) \approx \frac{2,142-1,544}{0,245} \approx 2,441$ zodat $K \approx 10^{2,441} \approx 276$ miljoen euro.

(Of: werk met de GR.)

e $K = \frac{76}{1,04^4} \approx 53,6$ miljoen euro.

$C = (1,544 + 0,245 \log(53,6))^9 \approx 442$ uur.

20 a $Dag_{Rome} = 12,14 + 3,12 \sin(0,0172(t - 80)) = 14$ geeft $\sin(0,0172(t - 80)) \approx 0,596$.

Dus $0,0172(t - 80) \approx 0,639 + k \cdot 2\pi \vee 0,0172(t - 80) \approx 2,503 + k \cdot 2\pi$

En $x \approx 117,1 + k \cdot 365,3 \vee x \approx 225,5 + k \cdot 365,3$.

Het is dus lekker lang licht vanaf dag 118 tot en met dag 225, dat zijn 108 dagen.

b De vroegste zonsopgang is $6,59 - 1,03 = 5,56$ (dus 5:34).

De laatste zonsopgang is $6,59 + 1,03 = 7,62$ (dus 7:37).

c $Zononder_{Rome} = Zonop_{Rome} + Dag_{Rome} =$

$12,14 + 3,12 \sin(0,0172(t - 80)) + 6,59 - 1,03 \sin(0,0172(t - 80))$

$Zononder_{Rome} = 18,73 + 2,09 \sin(0,0172(t - 80))$

De zonsondergang heeft dus meer invloed, want een grotere amplitude: $2,09 > 1,03$.

3 Formules opstellen

V1 De formule heeft de vorm $N(t) = a \cdot g^t$ met t in jaren na 1950 en N het aantal miljarden mensen.

$$6,5 = 2,5g^{55} \text{ dus } \frac{6,5}{2,5} = g^{55} \text{ en } g = \left(\frac{6,5}{2,5}\right)^{\frac{1}{55}} = 1,0175.$$

$$\text{Dus: } N(t) = 2,5 \cdot 1,0175^t.$$

In 2050 zijn er volgens dit model $N(100) = 2,5 \cdot 1,0175^{100} \approx 14,17$ mld mensen. (Hopelijk klopt dit model niet...)

1 a Richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{0-4} = -0,5$.

Punt B invullen in $y = -0,5x + b$ geeft $b = 6$.

$$\text{Formule: } y = -0,5x + 6.$$

b A invullen in $y = a(x-4)^2 + 6$ geeft $a = -0,25$.

$$\text{Formule: } y = -0,25(x-4)^2 + 6.$$

c $-0,25(x-4)^2 + 6 = -0,5x + 6$ geeft $(x-4)^2 = 2x$ en $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8) = 0$.

Dit geeft $x = 2$ v $x = 8$ en snijpunten $(2,5)$ en $(8,2)$.

2 a $(0,2)$ invullen in $y = a(x-6)^2 + 3$ geeft $a = -\frac{1}{36}$.

$$\text{Formule: } y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3.$$

b $y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3 = 0$ geeft $(x-6)^2 = 108$ en $x = 6 \pm \sqrt{108}$.

De bal komt na $6 + \sqrt{108} \approx 16,4$ m op de grond.

3 a $(4; 3,2)$ invullen geeft $3,2 = a \cdot 4^r$.

$(9; 10,8)$ invullen geeft $10,8 = a \cdot 9^r$.

Dit geeft $\frac{10,8}{3,2} = \frac{a \cdot 9^r}{a \cdot 4^r}$ en $3,375 = 2,25^r$ en $r = \frac{\log(3,375)}{\log(2,25)} = 1,5$.

En uit $3,2 = a \cdot 4^{1,5}$ volgt $a = 0,4$.

Functievoorschrift $N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5}$.

b $N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5} = 100$ geeft $t^{1,5} = 250$ en dus $t = 250^{\frac{1}{1,5}} \approx 39,69$.

De grafiek geeft $t \approx 40$.

4 a $(-2,0)$ invullen geeft $0 = a\sqrt{-2+b}$.

$(0,2)$ invullen geeft $2 = a\sqrt{b}$.

Dit geeft $\frac{0}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{-2+b}}{a \cdot \sqrt{b}}$ en $0 = \sqrt{\frac{b-2}{b}}$ en $\frac{b-2}{b} = 0$, zodat $b = 2$.

En uit $2 = a \cdot \sqrt{2}$ volgt $a = \sqrt{2}$.

Functievoorschrift $f(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t+2}$.

b $f(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t+2} = \sqrt{2} \cdot (t+2)^{\frac{1}{2}}$ en die functie ontstaat door de machtsfunctie $y = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$ met 2 naar links te verschuiven.

5 a Richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{1-11} = -0,5$.

Punt $(1,5)$ invullen in $\log(y) = -0,5 \log(x) + b$ geeft $b = 5,5$.

Formule: $\log(y) = -0,5 \cdot \log(x) + 5,5$.

b $\log(y) = -0,5 \cdot \log(x) + 5,5$ geeft

$$y = 10^{-0,5 \cdot \log(x) + 5,5} = 10^{5,5} \cdot 10^{\log(x) \cdot -0,5} \approx 316228 \cdot x^{-0,5}.$$

- 6 a** De groeifactor is $1,02 > 1$, dus als t toeneemt, neemt ook $1,02^t$ toe. De grafiek is stijgend. De stijging is toenemend, dus de grafiek gaat steeds steiler omhoog vanaf het punt $(0,6100)$.
- b** De reistijd is omgekeerd evenredig met de gemiddelde snelheid.
Als de gemiddelde snelheid groter wordt zal de reistijd kleiner worden, dus de grafiek is dalend.
Hoe groter de gemiddelde snelheid, hoe dichter de reistijd bij 0 komt, dus als de gemiddelde snelheid geen beperkingen nadert de reistijd grenswaarde $R = 0$.
- c** Dit is een lineair verband met positief hellingsgetal, dus als q toeneemt, neemt ook $0,85q$ toe.
De grafiek is daarom stijgend vanaf het punt $(0,310)$, er zijn ook kosten als er niets wordt geproduceerd (waarschijnlijk voor de machines die dan weliswaar niet worden gebruikt, maar toch geld kosten).
- d** Het gedeelte $70 \cdot 0,85^t$ hoort bij een dalend exponentieel verband, want $0,85 < 1$.
De temperatuur wordt dus steeds lager vanaf $t = 0$, dus vanaf 100°C .
Omdat bij groter wordende t het exponentiële deel naar 0 nadert, is er een grenswaarde $T = 30$.
- e** Het gedeelte $75 \cdot 0,95^t$ neemt af als t toeneemt, want $0,95 < 1$.
Omdat 35000 dus door een steeds kleiner wordend getal wordt gedeeld, neemt de uitkomst voor N juist toe.
Het aantal inwoners wordt dus hoger vanaf $t = 0$, dus vanaf $\frac{35000}{100} = 350$.
Maar omdat bij groter wordende t het exponentiële deel naar 0 nadert, is er een grenswaarde $N = \frac{35000}{25} = 1400$. Het aantal inwoners stijgt dus van 350 naar 1400 maximaal.
- f** Het gedeelte $420 \cdot 0,52^t$ neemt af als t toeneemt, want $0,52 < 1$.
Daardoor nadert $10 - 4,2 \cdot 0,52^t$ naar 10.
Het aantal roofdieren wordt dus groter vanaf $t = 0$, dus vanaf $720 \cdot (10 - 4,2) = 4176$.
Maar omdat bij groter wordende t het exponentiële deel naar 0 nadert, is er een grenswaarde $R = 720 \cdot 10 = 7200$. Het aantal roofdieren stijgt dus van 4176 naar 7200 als bovengrens.
- 7 a** Het functievoorschrift heeft de vorm $y = a \cdot g^x$.
Punt $(0,50)$ invullen geeft $50 = a \cdot g^0$ en $a = 50$.
Punt $(10,40)$ invullen geeft $40 = a \cdot g^{10}$.
Met $a = 50$ krijg je $40 = 50 \cdot g^{10}$ en $g = \left(\frac{40}{50}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,98$.
Formule: $y = 50 \cdot 0,98^x$.
- b** $50 \cdot 0,98^x = 10$ geeft $x = {}^{0,98}\log\left(\frac{10}{50}\right) = \frac{\log(0,2)}{\log(0,98)} \approx 79,7$.
De grafiek geeft $x \geq 79,7$.
- 8 a** $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17-5}{6-0} = 2$
De lijn gaat door $(0,5)$, dus: $\log(y) = 2x + 5$.
- b** $\log(y) = 2x + 5$ geeft $y = 10^{\log(y)} = 10^{2x+5} = 10^5 \cdot 10^{2x} = 100000 \cdot 100^x$.
- 9** Een rechte lijn opp enkellogaritmisch papier betekent dat $y = a \cdot g^t$.
Neem twee punten, bijvoorbeeld $(1,10)$ en $(6,100)$.
De groeifactor is $g = \left(\frac{100}{10}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,6$.
Een van de twee punten invullen in $y = a \cdot 1,6^x$ geeft $10 = a \cdot 1,6^1$ en $a \approx 6,3$.
Dit geeft de formule: $y = 6,3 \cdot 1,6^x$.
- 10** Gegeven zijn twee punten $(0,30000)$ en $(7,6000)$.
De groeifactor per dag is: $g = \left(\frac{6000}{30000}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,8$.
Het functievoorschrift is: $S = 30000 \cdot 0,8^t$.

- 11** De evenwichtsstand is het gemiddelde van -1 en -5 en dat is $y = \frac{-1 + -5}{2} = -3$.
- De amplitude is de helft van het verschil tussen het minimum en maximum en dat is $\frac{-1 - -5}{2} = 2$.
- Tussen het minimum en maximum zit een halve periode, dus de periode is $2 \cdot (8 - 2) = 12$.
- Het maximum zit op $\frac{1}{4}$ van de periode. Het maximum zit bij $x = 8$, dus de grafiek is 5 naar rechts verschoven.
- Formule: $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 5)\right) - 3$.
- 12 a** Je moet elk van de zeven artikelen met ten minste 100 waardepunten betalen.
De eerste 700 punten zijn € 10,50 waard en 11300 punten zijn € 56,50 waard.
Het kost in totaal $6 \cdot 9,30 + 46,50 = 102,30$ euro.
Marieke moet $(102,30 - 67,00)$ € 35,30 bijbetalen.
- b** Elk punt is € 0,005 waard, de helling is 0,005.
Voor de eerste 100 punten krijg je echter € 1,50, oftewel $1,50 - 100 \cdot 0,005 = 1,00$ euro extra.
Hieruit volgt dat het startgetal 1 is, zodat de formule $W = 1 + 0,005p$ is.
- 13 a** Lees af uit de grafiek: het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken in 1995 is 165000 en in 2013 is dit 130000.
Het aantal volgens de trendlijn in 1995 is 111000 en in 2013 is dit 86000.
In 1995 is het gemiddeld aantal in de drie beste zomerweken $\frac{165000 - 111000}{111000} \cdot 100 \approx 49\%$ meer dan het door de trendlijn voorspelde aantal. In 2013 is het gemiddeld aantal in de drie beste zomerweken $\frac{130000 - 86000}{86000} \cdot 100 \approx 51\%$ meer dan het voorspelde aantal.
In procent verschilde het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken in 1995 minder dan in 2013.
- b** Lees twee punten af op de lijn. Bijvoorbeeld bij $t = 0$ (in 1995) hoort 111000 en bij $t = 18$ hoort 86000 en $\frac{86000 - 111000}{18} \approx -1389$.
Neem A het aantal vlinders en t de tijd in jaar met $t = 0$ in 1995. Dan wordt de formule: $A = -1389t + 111000$.
 $-1389t + 111000 = 60000$ geeft $-1389t = -51000$, dus $t \approx 36,7$.
In het jaar 2032 of 2031 zijn er voor het eerst minder dan 60000 vlinders.
- 14** Twee punten (6,10) en (40,300) invullen geeft: $10 = a \cdot 6^n$ en $300 = a \cdot 40^n$.
Dit geeft $\frac{300}{10} = \frac{a \cdot 40^n}{a \cdot 6^n}$ en $\frac{300}{10} = 30 = \left(\frac{40}{6}\right)^n$, dus $n = \frac{40}{6} \log(30) \approx 1,8$.
Het invullen van de waarde van n en de coördinaten van een van de punten in $y = a \cdot x^n$ geeft: $10 = a \cdot 6^{1,8}$ en hieruit volgt: $a \approx 0,4$.
De vergelijking is: $B = 0,4 \cdot x^{1,8}$.
- 15 a** Teken de grafiek op enkellogpapier.
De groeifactor per per jaar is: $\left(\frac{178}{20}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1,20$.
- b** De groeifactor is 1,2 en het beginaantal is 20.
De formule is: $a = 20 \cdot 1,2^t$.
- 16 a** Er waren $835 + 1915 = 2750$ wilde zwijnen.
 $\frac{2750}{835} \approx 3,29$, dit is $329 - 100 = 229\%$ (te veel).
Of:
 $\frac{1915}{835} \approx 2,29$, dit is 229% (te veel).

- b** De formule is van de vorm: $Z = b \cdot g^t$.

De groeifactor is $g = \frac{275}{131} \approx 2,1$ (of $g = \frac{578}{275} \approx 2,1$).

De formule is: $Z = 131 \cdot 2,1^t$

$1700 = 131 \cdot 2,1^t$ geeft $2,1^t = \frac{1700}{131}$ en $x = 2,1 \log\left(\frac{1700}{131}\right) \approx 3,4547$.

En $t \approx 3,5$ betekent in 2009.

- 17 a** Lees af uit de figuur: de periode is ongeveer 51 jaar.

In $1913 + 2 \cdot 51 = 2015$ is er een maximum.

In 1989 (of 1990) is er een minimum.

Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, 2009 ligt niet in een periode van economische neergang.

- b** Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima voor $t \approx 1981$ en $t \approx 2044$ en een minimum voor $t \approx 2012$.

Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima voor $t \approx 1964$ en $t \approx 2015$ en minima voor $t \approx 1989$ en $t \approx 2040$.

Maak een (rudimentaire) schets van beide grafieken.

De gevraagde perioden zijn 1964 tot 1981; 1989 tot 2012; 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050.

- c** Een periode van 51 jaar geeft: $c = \frac{2\pi}{51}$.

Een beginwaarde is $\frac{3}{4}$ periode verder dan een hoogste punt, dus bijvoorbeeld $1913 + 0,75 \cdot 51 \approx 1951$.

Een juiste formule is bijvoorbeeld: $K = \sin\left(\frac{2\pi}{51}(t - 1951)\right)$.

4 Differentiaalrekening

- V1** Het soepblik moet de vorm van een cilinder hebben. Daarvoor heb je diameter d en hoogte h nodig. De formule voor inhoud I (oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte) is: $I = \frac{1}{4}\pi h d^2$.

Bereken de hoeveelheid blik die nodig is (twee grondvlakken en de opstaande rand):
 $A = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 + \pi d h$.

Omdat $I = 1$ is $\frac{1}{4}\pi h d^2 = 1$ en $h = \frac{4}{\pi d^2}$.

Vul dit resultaat in A in: $A = \frac{1}{2}\pi d^2 + \pi d \frac{4}{\pi d^2} = \frac{1}{2}\pi d^2 + \frac{4}{d}$.

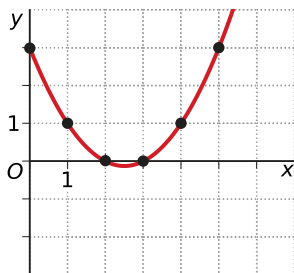
Bereken het minimum van A met behulp van differentiëren (of met de GR): $d \approx 1,08$ dm en $h \approx 1,08$ dm.

- 1 a** GR: $y_1 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x-1)$.

De tabel van y_2 is de toenametabel. Teken er een toenamediaagram bij.

- b** De grafiek is afnemend stijgend voor $x < 4$.
c De grafiek is toenemend dalend voor $x > 4$.

- 2** Maak eventueel eerst een tabel met toenames en van daaruit een tabel met y -waarden. De best passende grafiek lijkt een dalparabool.



- 3 a** De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-0}{3-0} = 0$.

- b** Het differentiequotient is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{-2-0}{1-0} = -2$.

- c** GR: $y_1 = x^3 - 3x^2$ en bereken $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}$.

Je vindt ongeveer $f'(1) = -3$

- d** De richtingscoëfficiënt is $a = f'(1) = -3$ en de raaklijn gaat door $(1, f(1)) = (1, -2)$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + 1$.

- 4 a** GR: $y_1 = 2 \sin(\pi(x-1)) + 3$ en bereken $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}$.

Je vindt ongeveer $f'(1) \approx 6,28 (= 2\pi)$.

- b** Periode: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, amplitude 2 en evenwichtsstand $y = 3$.

In de toppen is de helling 0.

Dat zijn de punten $(0,5; 1)$, $(1,5; 5)$, $(2,5; 1)$ en $(3,5; 5)$.

- 5 a** $\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{1000 \cdot 10^{-0,053 \cdot 1,5} - 1000 \cdot 10^{-0,053}}{1,5-1} \approx -104,8$ hPa.

- b** GR: $y_1 = 1000 \cdot 10^{-0,053x}$ en bereken $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=0}$.

Je vindt $p'(0) \approx -122$ hPa/km.

- 6 a** $f'(x) = 3 \cdot (2x+4)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x+4)^2$

b $g(x) = \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \sqrt{6-x}^{-\frac{1}{2}}$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (6-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 = \frac{1}{(12-2x)\sqrt{6-x}}$$

c $h'(x) = \frac{(2(x-3)) \cdot (2+x) - ((x-3)^2) \cdot (1)}{(2+x)^2} = \frac{x^2+4x-21}{(2+x)^2}$

d $j'(x) = 4x^2 \cdot \ln(4) \cdot 2x$

e $k'(x) = \frac{1}{(5x+1)\ln(10)} \cdot 5 = \frac{5}{(5x+1)\ln(10)}$

f $l'(x) = 1 \cdot \ln(2x) + x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \ln(2x) + 1$

7 a $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0 \text{ en } f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9.$$

Hieruit volgt: $y = 9x - 27$.

b $f'(x) = 3x^2 - 6x = 9$ geeft $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

Hieruit volgt: $x^2 - 2x - 3 = 0$ en $(x-3)(x+1) = 0$, dus $x = -1 \vee x = 3$.

Het zijn de punten (3,0) en (-1,-4).

8 $f'(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ geeft $x(x-2)(x-3) = 0$ en $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$.

Bekijk vervolgens de grafiek van f .

Het minimum voor f is 0 als $x = 0$.

Het maximum voor f is $2\frac{2}{3}$ als $x = 2$.

Het minimum voor f is $2\frac{1}{4}$ als $x = 3$.

9 a Het grondvlak en de bovenkant bestaan elk uit vier ribben met lengte x , oftewel $8x$.

Blijft voor de vier verticale ribben over $24 - 8x$, dat is per ribbe $6 - 2x$.

$$I = l \cdot b \cdot h = x \cdot x \cdot (6 - 2x) = 6x^2 - 2x^3$$

b $I = 6x^2 - 2x^3$ geeft $I' = 12x - 6x^2$.

Voor de extreme waarde geldt: $I' = 12x - 6x^2 = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 2$.

Ga met de grafiek na dat het een maximum betreft. De inhoud is $Inh = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 = 8 \text{ m}^3$.

10 a $I = l \cdot b \cdot h = x \cdot x \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$ geeft $h = \frac{1000}{x^2}$.

De verpakking heeft vier gelijke opstaande zijden van $x \cdot h$, oppervlakte $4xh$.

De verpakking heeft een bodem en deksel van $x \cdot x$, oppervlakte $2x^2$.

Totaal $A = 2x^2 + 4xh \text{ cm}^2$.

Bekend is dat $h = \frac{1000}{x^2}$. Hieruit volgt $Opp = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1000}{x^2} = 2x^2 + \frac{4000}{x} \text{ cm}^2$.

b $A = 2x^2 + \frac{4000}{x} = 2x^2 + 4000 \cdot x^{-1}$ geeft $A' = 4x - 4000 \cdot x^{-2} = 4x - \frac{4000}{x^2}$.

$$A' = 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \text{ geeft } 4x = \frac{4000}{x^2} \text{ en } 4x^3 = 4000, \text{ zodat } x = 10 \text{ cm.}$$

Dus 10 cm breed.

11 a Het grondtal is $1,02 > 1$, dus als t toeneemt, neemt ook $1,02^t$ toe. De helling stijgt toenemend, dus de grafiek gaat steeds steiler omhoog.

b De helling van de snelheidsgrafiek is constant, dus de helling stijgt steeds per stap met hetzelfde getal.

De grafiek van $v(t)$ is kwadratisch.

c Als t toeneemt, neemt $0,85^t$ af, want $0,85 < 1$.

En dan neemt T' juist toe (wordt steeds minder negatief) naar 0.

De grafiek van T daalt, maar steeds minder sterk en gaat dus waarschijnlijk naar een horizontale asymptoot.

- d** Als x toeneemt, nadert $\frac{20}{x^2}$, dus de helling, naar 0. Als x dichterbij 0 komt, wordt $y'(x)$, dus de helling steeds groter.

De grafiek van $y(x)$ heeft een verticale asymptoot bij $x = 0$ en gaat omhoog met een helling die naar 0 nadert, dus waarschijnlijk naar een horizontale asymptoot.

- 12 a** Grafiek 4 hoort bij model A, want de helling is constant.

Grafiek 1 hoort bij model B, want de helling neemt voortdurend af.

Grafiek 3 hoort bij model C, want de helling neemt eerst toe en dan af, maar blijft positief.

Grafiek 2 hoort bij model D, want de helling neemt eerst toe en dan af en wordt negatief.

- b** $TO' = -0,03 \cdot q^2 + 2b \cdot q = 0$ geeft $q = 0 \vee q = \frac{2b}{0,03}$ ($q = 0$ voldoet niet).
Dus $q_{\max} = 66,7 \cdot b$.

- 13 a** Mogelijkheid 1 kost € 50000.

Mogelijkheid 2 levert € 50000 aan emissierechten op.

Mogelijkheid 2 kost dus netto € 10000 en is daarmee het voordeligst.

- b** Ten opzichte van mogelijkheid 1 is mogelijkheid 2 10000 emissierechten voordeliger.
Ten opzichte van mogelijkheid 1 is mogelijkheid 2 € 60000 reductiekosten onvoordeliger.
Er is evenwicht als die 10000 emissierechten € 60000 euro waard zijn.
Dit is het geval wanneer een emissierecht € 6,00 waard is.
Of:

Mogelijkheid 1 kost $5000p$ (met p de prijs van een emissierecht).

Mogelijkheid 2 kost $60000 - 5000p$ (met p de prijs van een emissierecht).

Stel de vergelijking op: $5000p = 60000 - 5000p$.

De oplossing is: $p = 6$ euro.

- c** $K'(x) = \frac{(100000-x) \cdot 540 - 540x \cdot (-1)}{(100000-x)^2} = \frac{540000}{(100000-x)^2}$.

$K'(x)$ is voor elke waarde van x positief en dus is K stijgend.

- 14 a** 2 uur, 43 minuten en 32 seconden is $2 \cdot 3600 + 43 \cdot 60 + 32 = 9812$ seconden.

De snelheid is $\frac{42195}{9812} \approx 4,3$ m/s.

- b** Uit $x = 52$ volgt $v \approx 4,04$ (m/s).

De tijd die een 52-jarige volgens de formule loopt op die marathon is $\frac{42195}{4,04} \approx 10444$ s.

Dit is (ongeveer) 2,9 uur en dit is minder dan 3 uur.

Volgens dit model moet het kunnen binnen 3 uur.

Of:

Uit $x = 52$ volgt $v \approx 4,04$ (m/s).

In 3 uur legt een 52-jarige loopster ongeveer 43632 meter af.

Dit is meer dan 42195 meter.

Volgens dit model moet het kunnen binnen 3 uur.

- c** $v' = 1,886 \cdot x^{-0,335} - 1,137 \cdot x^{-0,182}$

Los de vergelijking $1,886 \cdot x^{-0,335} - 1,137 \cdot x^{-0,182} = 0$ met de GR op.

Voer in: $y_1 = 1,886 \cdot x^{-0,335} - 1,137 \cdot x^{-0,182}$ en $y_2 = 0$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ bij $-1 \leq y \leq 1$.

Snijpunt: $x = 27,31$ en $y = 0$, dus ongeveer 27 jaar.

15 a $200 - 180 \cdot e^{-0,29t} = 100$ geeft $e^{-0,29t} = \frac{5}{9}$.

Dus $t = \frac{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}{-0,29} \approx 2,027$

$0,027 \cdot 60 \approx 2$ min, dus het tijdstip is 17:02 uur.

b De grafiek van S stijgt weliswaar, maar dat proces gaat steeds langzamer. Daardoor blijven alleen diagram C en diagram D over. Omdat (zie a) de temperatuur blijft stijgen tot even na tijdstip $t = 2$, is er in de periode tussen 2 en 2,5 uur nog een kleine toename van de temperatuur. Alleen diagram C blijft dan over.

c $S' = -180 \cdot -0,29 \cdot e^{-0,29t}$

Vul je voor t positieve toenemende waarden in, dan geeft $e^{-0,29t}$ positieve uitkomsten die steeds dichterbij 0 gaan. Dan geeft $-0,29 \cdot e^{-0,29t}$ negatieve uitkomsten die ook steeds dichterbij 0 gaan. En dan geeft $-180 \cdot -0,29 \cdot e^{-0,29t}$ positieve uitkomsten die steeds dichterbij 0 gaan.

De grafiek van S' is voortdurend positief en dan is S voortdurend stijgend. Doordat S' steeds kleiner wordt (maar wel positief blijft) is S afnemend stijgend. De conclusie is juist.

d $S'(1) \approx 39,1$ en dit betekent: als de temperatuur een uur lang met dezelfde snelheid blijft stijgen als ze stijgt op het tijdstip $t = 1$, dan is de temperatuur $39,1$ °C gestegen.

e $e^{-0,29t} = \frac{200-S}{180}$ geeft $-0,29t = \ln\left(\frac{200-S}{180}\right)$ en $t = \frac{\ln\left(\frac{200-S}{180}\right)}{-0,29}$.

16 a $3 \cdot \sin(0,1 \cdot x)$ is maximaal 3 en minimaal -3.

h is maximaal $3 + 7 = 10$ meter.

h is minimaal $-3 + 7 = 4$ meter.

b Los op: $3 \cdot \sin(0,1 \cdot x) + 7 = 8$.

Gebruik hiervoor de grafische rekenmachine.

Voer in: $y_1 = 3 \cdot \sin(0,1 \cdot x) + 7$ en $y_2 = 8$ met venster $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 10$.

Snijden geeft: $x \approx 3,4$ of $x \approx 90,8$.

De lengte is ongeveer $90,8 - 3,4 \approx 87$ meter.

c De helling is (vanwege symmetrie) het grootst 'halverwege' de minimale en de maximale hoogte, dus bij hoogte 7 m.

$3 \cdot \sin(0,1 \cdot x) + 7 = 7$ geeft $\sin(0,1x) = 0$ en $x = k \cdot 10\pi$.

De maximale helling zit bij $x \approx 62,8$.

De voorgevel van het gebouw begint bij $x \approx 3,4$ meter.

De maximale helling bevindt zich op ongeveer $62,8 - 3,4 \approx 59$ meter van de voorgevel.

5 Discrete wiskunde

- V1** Voer de rij van Fibonacci op je rekenmachine in. Gebruik de twee startwaarden 1 en 1 en de recursieformule: $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$.
Je vindt: $u(20) = 6765$ en $u(21) = 10946$.
De benadering wordt: $\frac{u(21)}{u(20)} = 1,618034$.
De afwijking wordt: $\left| \frac{u(21)}{u(20)} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| 9,7719 \cdot 10^{-9}$.
- 1 a** Teken eventueel een wegendiaagram of een boomdiaagram.
Dan blijkt dat er $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ keuzemogelijkheden zijn.
- b** Streep de mogelijkheden die Jannes niet wil weg uit het wegendiaagram of boomdiaagram.
Je houdt dan $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ keuzemogelijkheden over.
- 2 a** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ mogelijkheden.
- b** Voor het eerste en derde cijfer heb je dan vijf en voor de overige cijfers tien mogelijkheden. In totaal zijn er $5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 250000$ codes.
- c** Mogelijke codes zijn 3333AB, A3333B en AB3333, waarbij A en B twee verschillende cijfers zijn, maar niet het cijfer 3.
Voor de code 3333AB zijn er $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ mogelijkheden.
Voor de code A3333B zijn er net zo veel mogelijkheden: $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 72$.
Voor de code AB3333 zijn er ook 72 mogelijkheden.
In totaal zijn er $3 \cdot 72 = 216$ codes mogelijk.
- 3** Stel je een wegendiaagram voor. Voor de eerste positie zijn acht mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog zeven en voor de derde nog zes.
Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijke uitslagen. Dit is het aantal mogelijke permutaties van drie elementen uit acht elementen waarbij de volgorde van belang is. De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie: ${}_8P_3 = 336$.
De acht zwemmers kunnen op $8! = 40320$ manieren op de ranglijst komen, er zijn dan 40320 uitslagen mogelijk.
- 4 a** Dit kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
- Je tekent bijvoorbeeld een "ja/nee"-rooster van 3 hokjes (ja) horizontaal en 6 hokjes (nee) verticaal.
- b** Er zijn in totaal $2^9 = 512$ mogelijkheden.
- c** Dit kan op $\binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 36 + 9 + 1 = 46$ manieren.
- d** In totaal zijn er 512 mogelijkheden.
- Er zijn $\binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 9 + 1 = 10$ manieren om meer dan zeven keer "kop" te gooien.
Er zijn dus $512 - 10 = 502$ manieren om hoogstens zeven keer "kop" te gooien.
- 5** Elk veld kan worden bereikt vanuit het veld linksonder, onder en rechtsonder. Dan is het aantal mogelijke manieren om in een bepaald veld te komen gelijk aan het aantal manieren om bij het veld linksonder te komen plus het aantal manieren om het veld eronder te komen plus het aantal manieren om in het veld rechtsonder te komen.

70	160	266	357	393	356	259	133
20	50	90	126	141	126	89	44
5	15	30	45	51	45	30	14
1	4	10	16	19	16	10	4
	1	3	6	7	6	3	1
		1	2	3	2	1	
			1	1	1		
				1			

Tel de getallen in de bovenste rij op. Dat geeft 1994 manieren.

6 a Rekenkundige rij, er komt telkens 6 bij: $u_{10} = 3 + 9 \cdot 6 = 45$.

b Recursieformule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 3$ en $n = 0, 1, 2, \dots$
Directe formule $u_n = 3 + 6n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$

c $S_{19} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (3 + 3 + 19 \cdot 6) = 1200$

7 a Meetkundige rij, er wordt telkens met 4 vermenigvuldigd: $u_{10} = 3 \cdot 4^9 = 786432$.

b Recursieformule $u_n = 4 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 3$ en $n = 0, 1, 2, \dots$
Directe formule $u_n = 3 \cdot 4^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$

c Directe formule $u_n = 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^n (1 - 4^{-1}) = 2,25 \cdot 4^n$ met $n = 1, 2, \dots$ Recursieformule $u_n = 4 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 2,25$ en $n = 1, 2, \dots$

d $S_{19} = 3 \cdot \frac{1-4^{20}}{1-4} \approx 1,10 \cdot 10^{12}$

8 $u_n = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 2$.
 $u_1 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_0} = 3 + 4 \cdot \sqrt{2}$
 $u_2 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_1} \approx 3 + 4 \cdot \sqrt{8,66} \approx 14,77$
 $u_3 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_2} \approx 3 + 4 \cdot \sqrt{14,77} \approx 18,4$

9 a Recursieformule: $m_t = 4 \cdot m_{t-1}$ met $m_0 = 50$.
Directe formule: $m_t = 50 \cdot 4^t$ met $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

b GR: de zesde term is de eerste die hoger is dan 50000, dat is m_5 .
Aan het begin van jaartal $2020 + 5 = 2025$ is er een rattenplaag.

10 a $b_n = 7350 + 300 \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
 $a_n = 7350 \cdot 1,0275^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$

b $b_9 = 7350 + 300 \cdot 9 = 100050$ euro en $a_9 = 7350 \cdot 1,0275^9 \approx 9382,61$ euro.
Beatrice betaalt in 2029 de meeste huur.

c Beatrice: $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (7350 + 7350 + 300 \cdot 19) = 204000$ euro.

Achmed: $7350 \cdot \frac{1-0,0275^{20}}{1-0,0275} = 192550,87$ euro.

Dus ook in totaal is Beatrice dan het meest kwijt.

11 a Voor elk onderdeel zijn er 5 mogelijkheden. In totaal zijn er $5^4 = 625$ verschillende vierkanten mogelijk.

b $4 \times 125 + 2 \times 25 + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 570$

c Het kunstwerk is een vierkant en bestaat uit 25 rijen. In totaal zijn er dan 625 termen in het kunstwerk.
0 is de eerste en 624 is de laatste.

De som is dan $0,5 \cdot 625 \cdot (0 + 624) = 195000$.

Het magische getal is dus $\frac{195000}{25} = 7800$.

d Een kunstwerk van p bij p getallen kent p^2 termen.

De som s is dan $s = 0,5 \cdot p^2 \cdot (0 + p^2 - 1)$.

Er zijn p rijen en het magische getal is dan $\frac{0,5 \cdot p^2 \cdot (p^2 - 1)}{p}$.

Herleid dit tot: $0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$.

- 12 a** Voer de recursieve formule in op de rekenmachine. Voor de maand juni vind je het aantal tubes tandpasta bij $n = 6$, dat zijn 4375 tubes tandpasta.

- b** De schattingen moeten liggen tussen (ongeveer) 4300 en 4386. Schat V_3 op 4480 en $V_4 = 4288$. De volgende schatting voor V_5 wordt dan 4365 en wijkt minder dan 1% af van 4343. Het antwoord is de maand mei.

- c** $V_3 = a \cdot 4000 + (1 - a) \cdot 5200 = 5200 - 1200a$
 $V_4 = a \cdot (5200 - 1200a) + (1 - a) \cdot 4000 = 5200a - 1200a^2 + 4000 - 4000a = -1200a^2 + 1200a + 4000$

- 13 a** $\binom{24}{10} = \frac{24!}{10! \cdot 14!} = 1961256$ mogelijkheden.

- b** Houd rekening met het minimale en maximale aantal noodzakelijke inspecties.
 Minimaal: in elk gat dat wordt geïnspecteerd zit een zaadje. Minimaal zijn er 4 inspecties nodig.
 Maximaal: eerst inspecteert het vogeltje alle gaten zonder zaadje. Dit zijn er 14. En dan inspecteert hij vier gaten met zaadje. Er zijn maximaal 18 inspecties noodzakelijk.

- 14 a** Volgens de grafiek wonen er in 2000 in totaal (in miljoenen) $2100 + 1450 + 850 + 550 + 500 + 300 + 275 + 25$ mensen. Samen zijn dit ongeveer 6,05 miljard. Dit is in overeenstemming met de figuur.

- b** Voer de recursieformule in op de GR en maak een plot. De grenswaarde die wordt bereikt is 10,9 miljard.
 Reken B_5 uit om de waarde in 2050 uit te rekenen. In de tabel is dit 9,4. Deze waarde verschilt meer dan 10% van de grenswaarde.

- 15** Er zijn 5 trio's van het type xxx (omdat x geen 1 of 2 kan zijn).

Er zijn verder $\binom{7}{3} = 35$ trio's van het type xyz.

Bij trio's van het type xxy zijn er 6 keuzes voor x (omdat x geen 1 kan zijn).

Bij trio's van het type xxy zijn er bij elke keuze vervolgens nog 6 keuzes voor y en dan zijn er $6 \cdot 6 = 36$ trio's van het type xxy.

In totaal zijn er $5 + 35 + 36 = 76$ verschillende cijfertrio's mogelijk.

- 16** Stel vast dat $3 - 3 - 3 - 0$, $3 - 2 - 2 - 2$ en $3 - 3 - 2 - 1$ de mogelijke verdelingen van de aantallen blokjes over de staven zijn.

Voor de verdelingen $3 - 3 - 3 - 0$ en $3 - 2 - 2 - 2$ zijn er elk $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden.

Voor de verdeling $3 - 3 - 2 - 1$ zijn er $\frac{4!}{2!} = 12$ mogelijkheden.

Bij elke verdeling van de blokjes over de staven zijn er 9 verschillende posities voor de 9 verschillende blokjes en dit geeft dan $9! = 362880$ mogelijkheden.

In totaal heb je dan $362880 \cdot (4 + 4 + 12) = 7257600$ verschillende opstellingen.

6 Naar het examen

- 1 a** Omdat de elektriciteitsprijs elk jaar met 5% stijgt, stijgt de opbrengst ook elk jaar met 5%.
Hierbij hoort een groeifactor van 1,05.
De opbrengst in jaar 1 is $1750 \cdot 0,225 = 393,75$ (euro).
In jaar t is de opbrengstformule dan $Z = 393,75 \cdot 1,05^{t-1}$, dus $a = 393,75$ en $b = 1,05$.
- b** De opbrengst per jaar is $0,225 \cdot 2500 = 562,50$ (euro).
 $6299 \cdot 0,15 = 944,85$; dit is meer dan 650 (euro) dus 650 (euro) subsidie.
Het aankoopbedrag is $6299 - 650 = 5649$ (euro).
De terugverdientijd is $\frac{5649}{562,50} \approx 10,04$ (jaar) dus in 2023 is het volledig terugverdiend.
- c** $\frac{dT}{dx} = \frac{325(46,9x) - 46,9(650 + 325x)}{(46,9x)^2} = \frac{-30485}{(46,9x)^2}$
De teller is negatief en de noemer is positief, dus deze afgeleide is altijd negatief en de terugverdientijd daalt.
- d** Uit de tabel volgt dat de elektriciteitsopbrengst per paneel per jaar 208,3 (of 208,4) (kWh) (of nauwkeuriger) is.
De opbrengst in euro's voor x panelen is $O = 0,225 \cdot 208,3x \approx 46,90x$ (euro per jaar).
De aanschafprijs is $P = 0,85(1300 + 325x) = 1105 + 276,25x$ (euro).
 $T = \frac{P}{O} = \frac{1105 + 276,25x}{46,90x}$
- 2 a** $\frac{10^9}{125} = 8000000$ minuten en dat is $\frac{8000000}{60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 15,2$ jaar.
- b** $H = \frac{10^9}{365 \cdot 24 \cdot 60 L} \approx \frac{1903}{L}$ en dat klopt met de gegeven formule.
- c** $H'(L) = -\frac{1900}{L^2}$
De teller is negatief en de noemer is positief, dus deze afgeleide is altijd negatief en H is daarom dalend.
Als L toeneemt, wordt H' steeds kleiner en de daling dus ook steeds kleiner.
- d** Walvis (60,35) en hamster (3,450).
De groeifactor is $\left(\frac{35}{450}\right)^{\frac{1}{57}} \approx 0,956$.
Er geldt $35 = b \cdot 0,956^{60}$ zodat $b \approx 515$.
- e** $H = 520 \cdot 0,95^L$ geeft $L = 0,95 \log\left(\frac{H}{520}\right) = \frac{\log\left(\frac{H}{520}\right)}{\log(0,95)}$.
Dit geeft $L \approx -44,891 \cdot \log\left(\frac{H}{520}\right) = -44,891 \cdot \log(H) - -44,891 \cdot \log(520)$.
En dus: $L \approx -44,89 \cdot \log(H) + 121,92$, dus $a \approx -44,89$ en $b \approx 121,92$.
- 3 a** $T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10000}{15000}\right)^{1,07} \approx 2223,13$ seconden en dat is ongeveer 37 minuten en 3 seconden.
- b** Omdat $\frac{d_1}{d_2}$ niet verandert als je beide door hetzelfde deelt of met hetzelfde vermenigvuldigt.
- c** $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$ en $d_2 = 2 \cdot d_1$ geeft:
 $T_2 = T_1 \cdot 2^{1,07} \approx 2,099 T_1$, dus $v_2 \approx \frac{2 \cdot d_1}{2,099 \cdot T_1} \approx \frac{2}{2,099} \cdot v_1 \approx 0,953 \cdot v_1$.

De snelheid neemt met 4,7% af.

$$d \quad K = \frac{T}{d} \text{ geeft } K = \frac{206 \left(\frac{d}{1,5} \right)^{1,07}}{d} = \frac{206}{1,5^{1,07}} \cdot \frac{d^{1,07}}{d} \approx 133,49 \cdot d^{0,07}.$$

Dus $p \approx 133,49$ en $q = 0,07$.

$$e \quad 363,32 = 756,3 \cdot \left(\frac{5000}{10000} \right)^a \text{ geeft } 0,5^a \approx 0,4804 \text{ en } a \approx \frac{\log(0,4804)}{\log(0,5)} \approx 1,058.$$

$$4 \quad a \quad 7 + 7 \sin \left(\frac{2\pi}{60}(x - 15) \right) = 4,5 \text{ geeft door terugrekenen of met de GR: } x \approx 11,513 \vee x \approx 48,487.$$

Dus die lengte is ongeveer $11,513 - 48,487 \approx 36,97$ m.

$$b \quad \text{De evenwichtsstand is } 6,25 \text{ en de amplitude is } 6,25 \text{ dus } a = 6,25.$$

$$\text{De periode is } 51 \text{ dus } c = \frac{2\pi}{51} \approx 0,123.$$

Vanaf het begin van de tweede golf is een kwart periode ($\frac{51}{4} = 12,75$) nodig om bij het punt te komen waar de golf stijgend door de evenwichtsstand gaat. Hieruit volgt dat $d = 60 + 12,75 = 72,75$.

$$c \quad \text{Een formule voor de golf is } h = a + a \sin \left(\frac{2\pi}{39}(x - 9,75) \right).$$

Deze sinusoiden moet door het punt met $x = 7,5$ en $h = 4,5$ gaan.

$$\text{Dus } a + a \sin \left(\frac{2\pi}{39}(7,5 - 9,75) \right) \geq 4,5.$$

$$a + a \sin \left(\frac{2\pi}{39}(7,5 - 9,75) \right) = 4,5 \text{ geeft } a \approx 6,97.$$

$a \geq 6,97$, dus de hoogte is (minimaal) 14,0 m.

$$5 \quad a \quad \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} \approx 3,25$$

Dit verschilt meer dan 0,1 van π .

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} \approx 3,042$$

Dit verschilt minder dan 0,1 van π .

Er zijn minimaal 10 termen nodig.

$$b \quad n = 1 \text{ invullen geeft } \frac{a \cdot (-1)^0}{b \cdot 0 + 1} = \frac{a}{1} = \frac{4}{1} \text{ en dit geeft } a = 4.$$

$$n = 2 \text{ invullen geeft } \frac{4 \cdot (-1)^1}{b \cdot 1 + 1} = \frac{-4}{b \cdot 1 + 1} = -\frac{4}{3} \text{ en dit geeft } b = 2.$$

$$c \quad \text{Voor de verschilterm kun je gebruikmaken van een factor gelijk aan } (-1)^{n-1}.$$

De eerste factor in de noemer van de verschilterm kan worden beschreven met $2n - 1$.

De tweede factor in de noemer van de verschilterm kan worden beschreven met 3^{n-1} .

$$\text{De recursieve formule wordt dan } S_n = S_{n-1} + \frac{\sqrt{12} \cdot (-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} \text{ met } n = 2, 3, 4, \dots$$

$$6 \quad \text{Benzine kost per liter (ongeveer) € 1,75.}$$

Diesel kost per liter (ongeveer) € 1,45.

De dieselluitvoering kost per jaar $4 \cdot 478 - 4 \cdot 242 = 944$ euro meer dan de benzine-uitvoering.

De benzine-uitvoering kost per 100 kilometer $6,4 \cdot 1,75 = 11,20$ euro.

De dieselluitvoering kost per 100 kilometer $4,5 \cdot 1,45 = 6,53$ euro.

Peter moet dus ten minste $\frac{944}{11,20 - 6,53} \cdot 100 \approx 20200$ km per jaar (of meer) rijden.

a

abc-formule 14
afgeleide functie 36
afgeleide waarde 36
algebraïsch oplossen 14
amplitude 8, 28
asymptotisch gedrag 4

b

balansmethode 14
bereik 4
boomdiagram 46

c

combinatie 46

d

differentiaalquotiënt 36
differentiequotiënt 36
differentiëren 38
directe formule 48
domein 4

e

evenwichtswaarde 8, 28
exact oplossen 14
exponentieel verband 6, 28
extremen 4

f

faculteit 46
functie, karakteristieken van 4

g

gebroken functie 4
gemiddelde verandering 36
grafisch extrapoleren 18
grafisch interpoleren 18

h

halveringstijd 6, 16
herschalen in de x-richting 8
herschalen in de y-richting 8
(hogere machts) wortelfunctie 4
horizontale verschuiving 8, 28

i

inklemmen 14

k

kettingregel 38
kwadraat afsplitsen 14
kwadratisch verband 26
kwadratische functie 4

l

lineair extrapoleren 18
lineair interpoleren 18
lineair verband 26
lineaire functie 4
logaritmisch verband 6
logaritmische schaalverdeling 6

m

machtsverband 26

o

omgekeerd evenredig 4
ongelijkheid oplossen 14
ontbinden in factoren 14
optimaliseringsprobleem 38

p

periode 8, 28
periodieke functie 8
permutatie 46
productregel 38

q

quotiëntregel 38

r

raaklijn 36, 38
recht evenredig 4
recursie 48
recursieformule 48
reden 48
rekenregels logaritmen 16
rekenregels machten 16
rij getallen 48
rooster 46

s

sinusoïde 8, 28
snijpunten met de x-as 4
snijpunten met de y-as 4
somregel 38
somrij 48
standaardfuncties 4

t

terugrekenen 14
toenamediaagram 36

u

uiterste waarden 38
uitschrijven 46

v

verdubbelingstijd **6, 16**

vergelijking oplossen **14**

verschilrij **48**

verschuiven in de x-richting **8**

verschuiven in de y-richting **8**

w

wegendiagram **46**

Deze examentraining bereidt je voor op het VWO Wiskunde A examen. De complete examenstof is daarvoor opgedeeld in overzichtelijke onderwerpen. Ieder onderwerp begint met een verkenningsopgave. Die opgave laat zien waar je het onderwerp in de praktijk kunt tegenkomen.

Een onderwerp bevat meerdere theorieblokken. Naast ieder theorieblok staan oefenopgaven om de theorie weer even op te halen. Een onderwerp wordt afgesloten met verwerkingsopgaven die gebaseerd zijn op vraagstukken uit de officiële wiskundeexamens.

Probeer bij het maken van opgaven niet te snel naar de antwoorden achter in deze reader te kijken.

Deze examentraining wordt afgesloten met een echt examen. Als je dat examen gaat maken, probeer dan de examenomstandigheden een beetje na te bootsen. Dit is natuurlijk maar één examen. Er zijn veel meer oude examens. Die vindt je op de [Math4All website](http://www.math4all.nl).

Veel succes gewenst namens Math4All.

